

- Tutorium -

Funkortung und Funknavigation

URL: *<http://www.suart.de/lehre/navigation.pdf>*

Uwe Siart
tutorien@suart.de

2. April 2012 (Version 1.13)

Inhaltsverzeichnis

1	Ausbreitung elektromagnetischer Wellen	4
1.1	Kenngößen	4
1.2	Brechung und Funkhorizont	7
1.3	Beugung	9
1.4	Streuung	10
1.5	Bodenreflexion	11
1.6	Doppler-Effekt	13
2	Radartechnische Grundlagen	14
2.1	Rückstreuquerschnitt und Radargleichung	14
2.2	Funkkoordinaten	15
2.3	Entfernungsauflösung	16
2.4	Winkelauflösung	18
2.5	Dopplerauflösung	20
2.6	Auflösung und Genauigkeit	21
2.7	Eindeutigkeitsbereich	22

3	Ortungsfehler	23
3.1	Wichtige Verteilungsdichten	23
3.2	Fehlerellipsen und Fehlerkreis	26
3.3	Standlinien-Netz	27
4	Ortungs- und Navigationsverfahren	28
4.1	Begriffe	28
4.2	Aufgaben	28
4.3	Grundverfahren	29
4.4	Frequenzbereiche	30
4.5	Hyperbelnavigation	31
4.6	Richtungspeilung	33
4.7	Dopplerpeiler	35
4.8	Very High Frequency Omnidirectional Radio (VOR)	37
4.9	Monopuls-Verfahren	38
4.10	Instrumentenlandesystem (ILS)	39
4.11	Satellitennavigation	41

1 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

1.1 Kenngrößen

Phasengeschwindigkeit:

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

Laufzeit:

$$\tau = \frac{r}{v_p}$$

Phasenkonstante:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_p} = \omega \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

Phasenverschiebung (elektrische Länge):

$$\Delta\varphi = -\beta (r_2 - r_1)$$

Eindringtiefe:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa \mu_0 \mu_r}}$$

Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit

Untergrund	Dielektrizitätskonstante ϵ_r	Leitfähigkeit κ (S/m)
Meerwasser	80	1 - 5
Süßwasser	80	10^{-2} - 10^{-3}
Eis	3	10^{-5}
feuchtes Gelände	5 - 15	10^{-2} - 10^{-3}
trockenes Gelände	2 - 6	10^{-3} - $5 \cdot 10^{-5}$

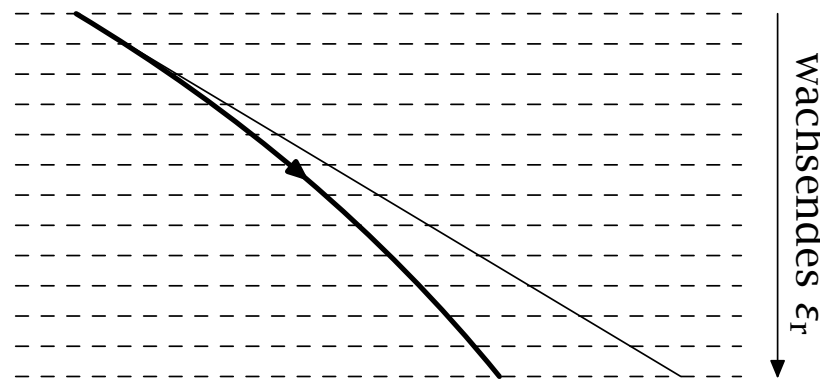
Eindringtiefe δ_0 in m

Frequenz	Seewasser $\epsilon_r = 80 ; \kappa = 4 \text{ s/m}$	feuchtes Gelände $\epsilon_r = 10 ; \kappa = 10^{-2} \text{ s/m}$	mittleres Gelände $\epsilon_r = 5 ; \kappa = 10^{-3} \text{ s/m}$
10 kHz	2,5	50	150
100 kHz	0,80	15	50
1 MHz	0,14	5	17
10 MHz	0,08	2	9

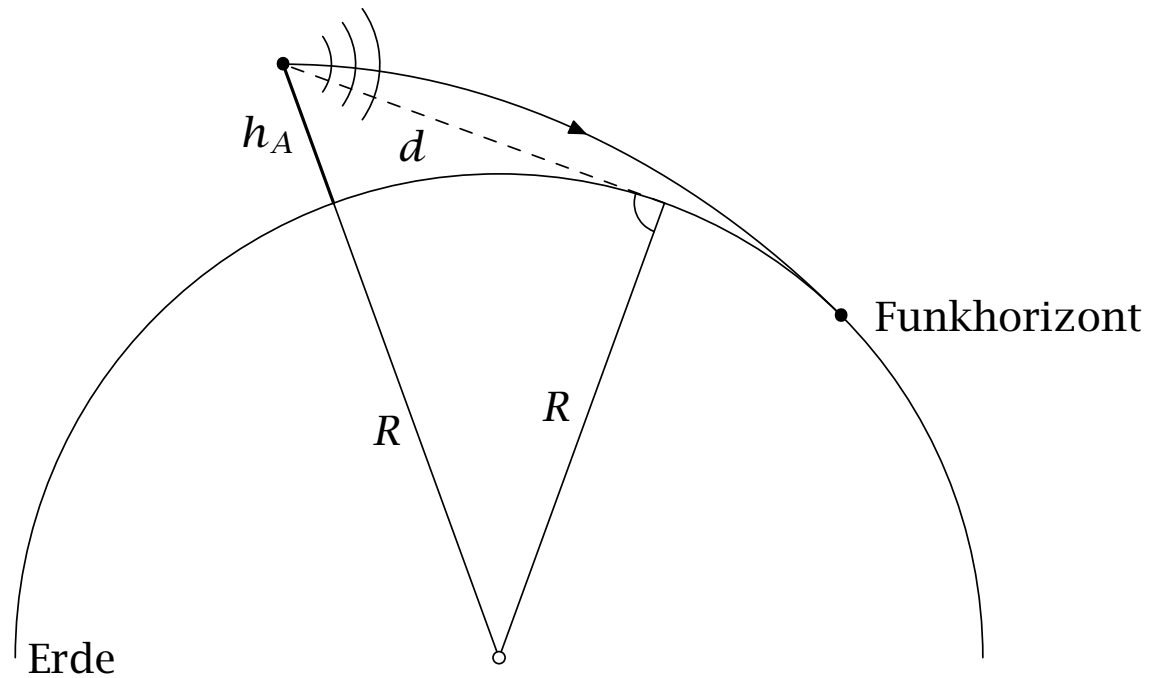
Funknavigation von Unterseebooten ist wegen der hohen Leitfähigkeit von Seewasser nur bei tiefen Frequenzen im unteren Kilohertzbereich möglich.

1.2 Brechung und Funkhorizont

In inhomogenen Medien wird die Ausbreitungsrichtung elektromagnetischer Wellen zum optisch dichteren Medium (größeres ϵ_r) hin gekrümmt.



In der Atmosphäre nimmt die Brechzahl $n = \sqrt{\epsilon_r}$ von $n = 1,0000$ im Weltraum mit wachsendem Luftdruck bis auf $n = 1,0003$ auf der Erdoberfläche zu.

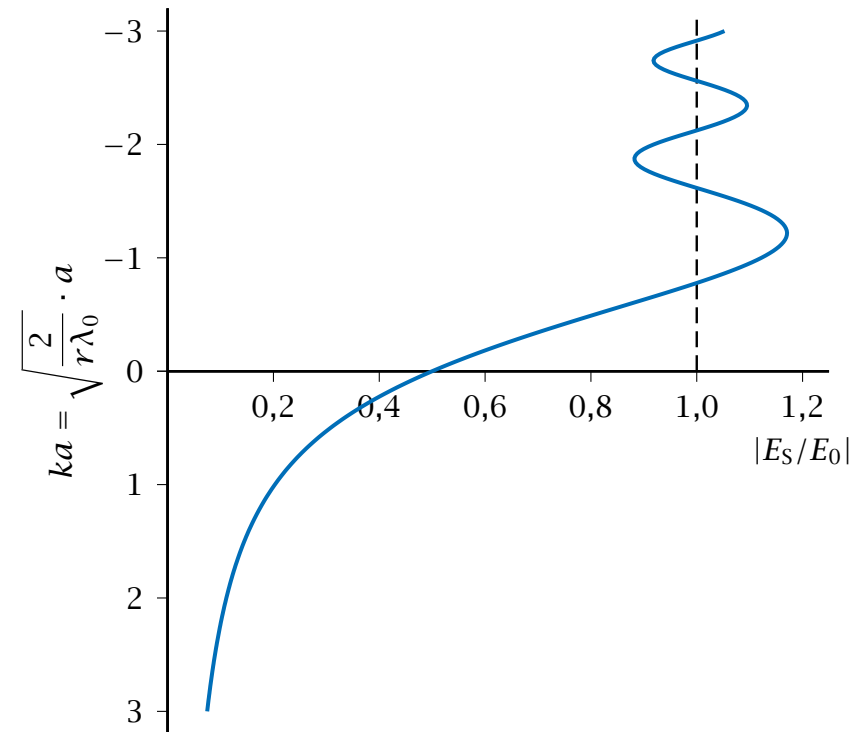
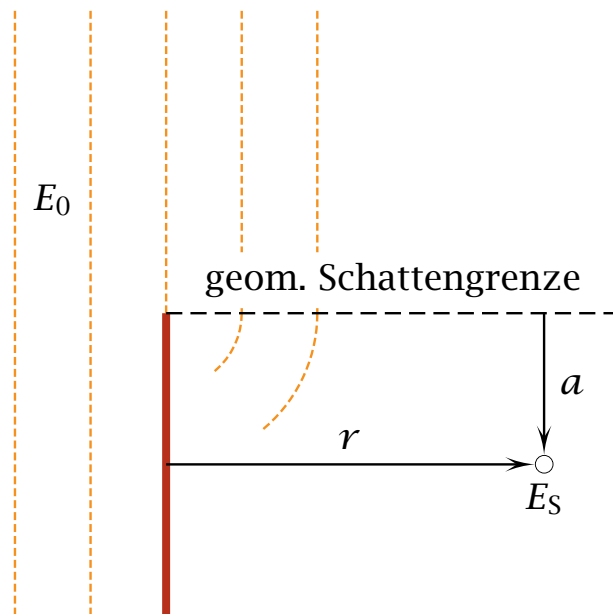


Der Funkhorizont

$$d_{\text{Funk}} = \sqrt{2 \cdot k_E \cdot R \cdot h_A}$$

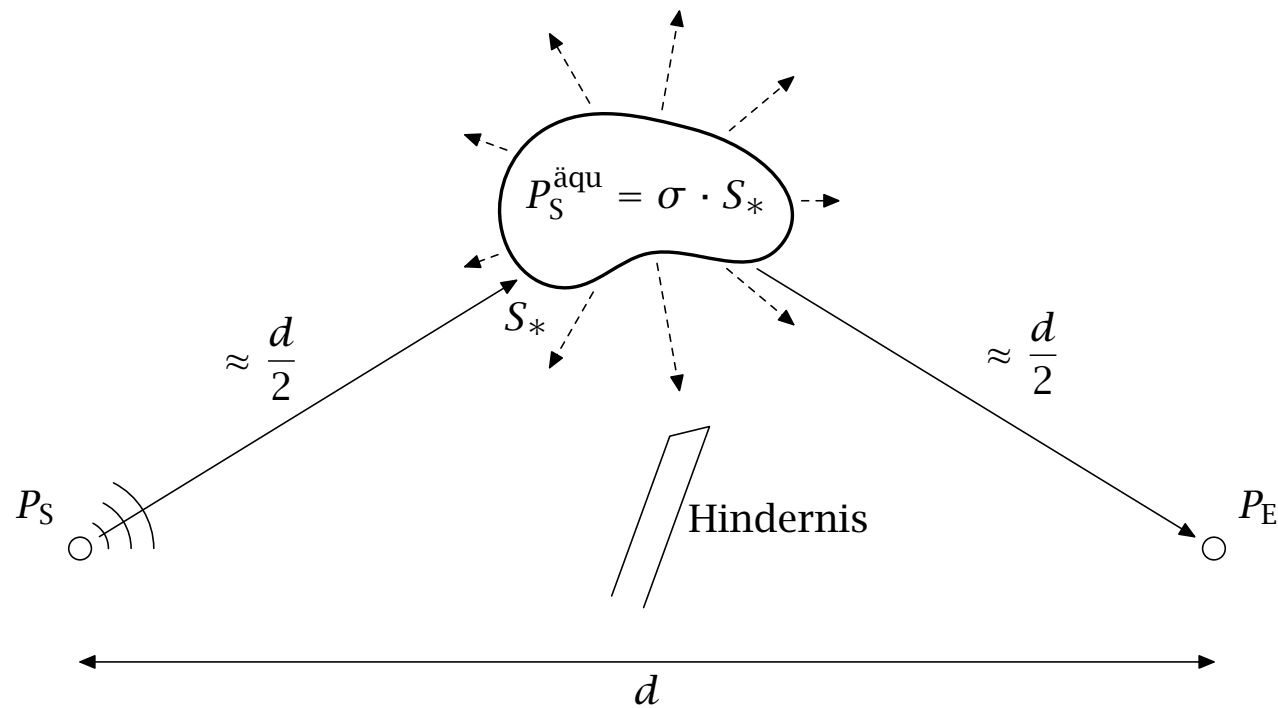
ist daher weiter als der geometrische Horizont. Der *Krümmungsfaktor* ist $k_E = 4/3$.

1.3 Beugung



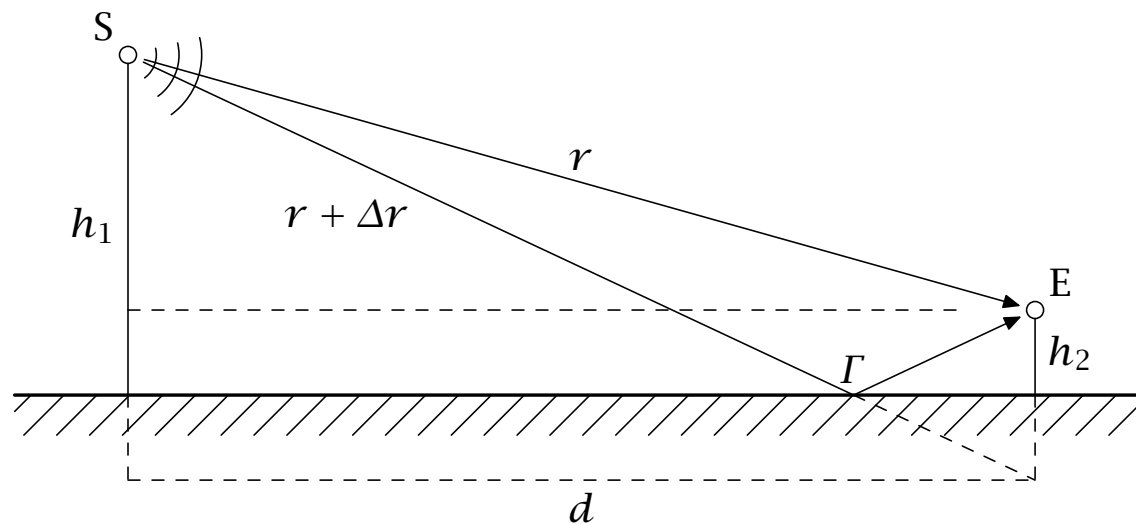
Die Beugung an einer leitenden Halbebene wird beschrieben durch den normierten Parameter $ka = \sqrt{2/(r \lambda_0)} \cdot a$ und durch die dargestellte Funktion $|E_S/E_0| = f(ka)$.

1.4 Streuung



$$\frac{P_E}{P_S} = G_E G_S \frac{\lambda_0^2}{4\pi^3 d^4} \sigma \propto \frac{1}{d^4}$$

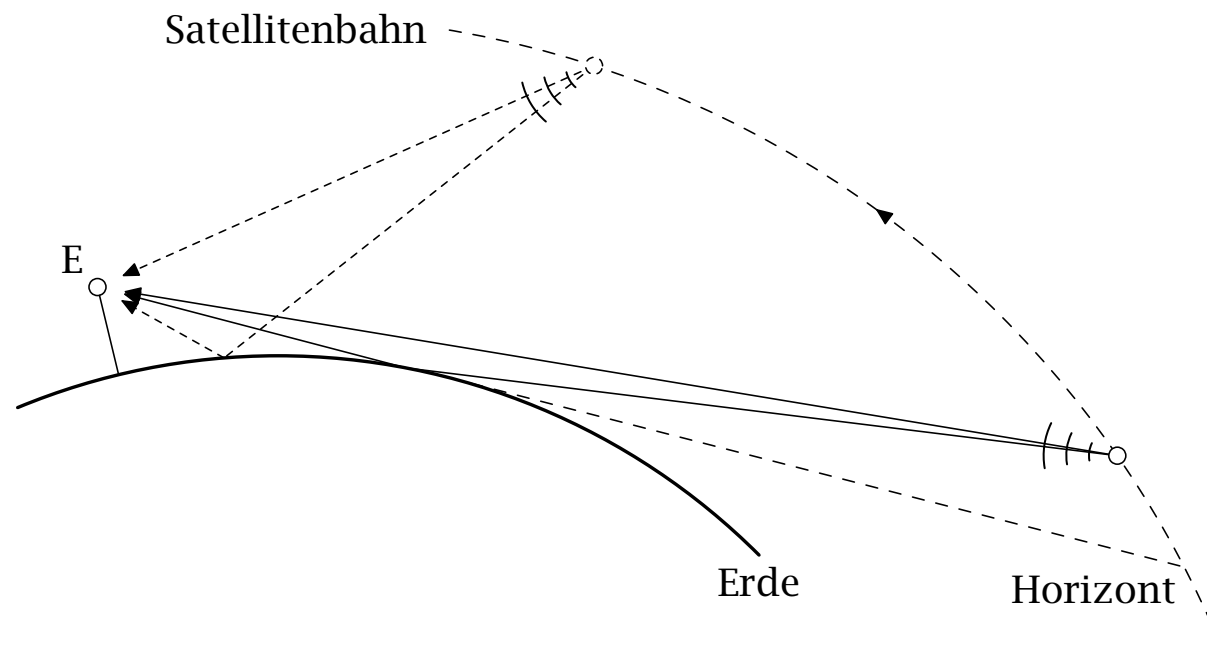
1.5 Bodenreflexion



Die Reflexion unter streifendem Einfall erfolgt näherungsweise mit Betrag 1 und mit 180° Phasensprung ($\Gamma \approx -1$). Direkter und reflektierter Anteil löschen sich am Empfängerort nahezu aus.

$$\frac{P_E}{P_S} = G_E G_S \frac{(h_1 h_2)^2}{d^4} \propto \frac{1}{d^4}$$

Bodenreflexion

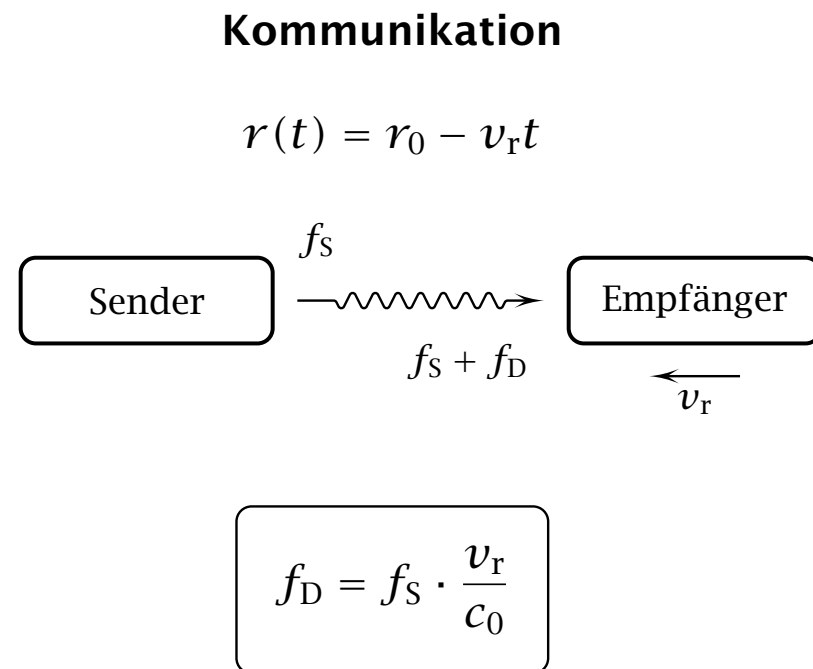
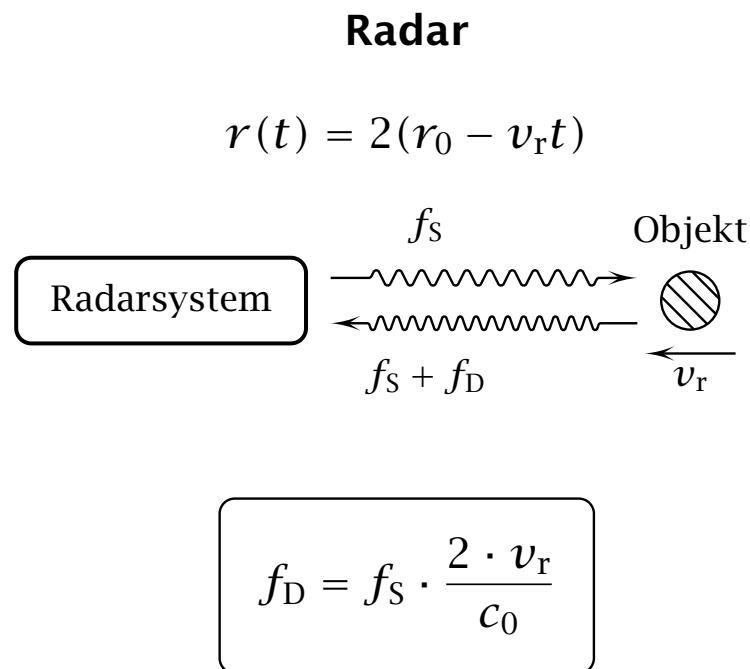


Wegen der Zweiwegeausbreitung durch Reflexion an der Erdoberfläche haben Satellitensignale meist erst dann ausreichenden Pegel, wenn der Satellit mehr als 10° über dem Horizont steht.

1.6 Doppler-Effekt

Empfangsfrequenz bei Relativbewegung (Relativgeschwindigkeit v_r):

$$\omega_E = \frac{d\phi}{dt} = \omega_S - \beta_0 \frac{dr(t)}{dt} = \omega_S + \omega_D \quad ; \quad r(t): \text{Länge des Signalweges.}$$



2 Radartechnische Grundlagen

2.1 Rückstreuquerschnitt und Radargleichung

Strahlungsleistungsdichte:

$$S_* = \frac{G \cdot P_S}{4\pi r^2}$$

Rückstreuquerschnitt:

$$\sigma = \frac{P_{S,\text{äqu}}}{S_*} \quad ; \quad [\sigma] = \text{m}^2$$

Antennenwirkfläche:

$$A_W = G \cdot \frac{\lambda_0^2}{4\pi}$$

Empfangsleistung:

$$P_E = A_W \cdot \frac{P_{S,\text{äqu}}}{4\pi r^2}$$

Radargleichung:

$$\frac{P_E}{P_S} = \frac{G^2 \lambda_0^2}{(4\pi)^3 r^4} \cdot \sigma$$

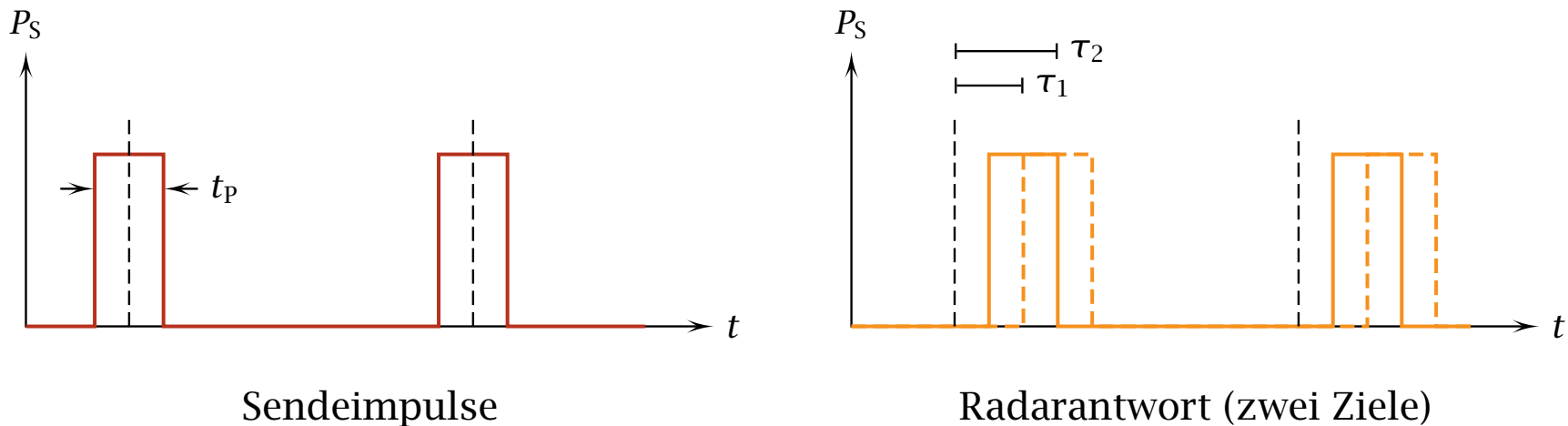
S_*	am Ort des Streuers einfallende Strahlungsleistungsdichte
$P_{S,\text{äqu}}$	äquivalente, am Ort des Streuers isotrop abgestrahlte Sendeleistung
σ	Rückstreuquerschnitt
P_S	Sendeleistung
P_E	Empfangsleistung
G	Antennengewinn
λ_0	Freiraum-Wellenlänge
r	Zielabstand

2.2 Funkkoordinaten

Funkkoordinate	Messung	Auflösungsbegrenzung
Entfernung	Signallaufzeit (Puls oder PN-Code)	Signalbandbreite
	Frequenzgang der Reflexion	Signalbandbreite
Richtung (Winkel)	Antennenbündelung	Antennengröße
	Strahlergruppe	Antennengröße
	Monopulsverfahren	-
Dopplerfrequenz	Empfangsfrequenz	Messzeit

Die Möglichkeiten eines Radarsystems sind außer von Signalerzeugung und Signalverarbeitung wesentlich von der Antenne (Bandbreite und Baugröße) bestimmt.

2.3 Entfernungsauflösung

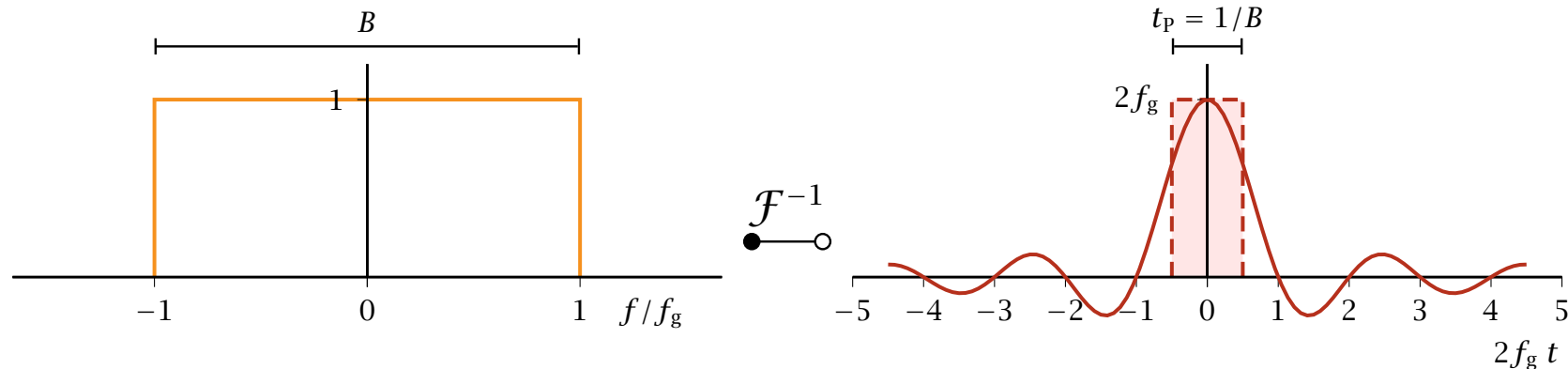


Zwei Ziele können getrennt detektiert werden, wenn $\tau_2 - \tau_1 \geq t_p$. Für den Abstand Δr zwischen den Zielen folgt daraus

$$\Delta r = \frac{c_0 \cdot t_p}{2} = \frac{c_0}{2B}$$

Zahlenbeispiel: Für eine Entfernungsauflösung von $\Delta r = 50 \text{ cm}$ darf die Impulsdauer maximal $t_p = 3,33 \text{ ns}$ betragen.

Entfernungsauflösung



Spektrum

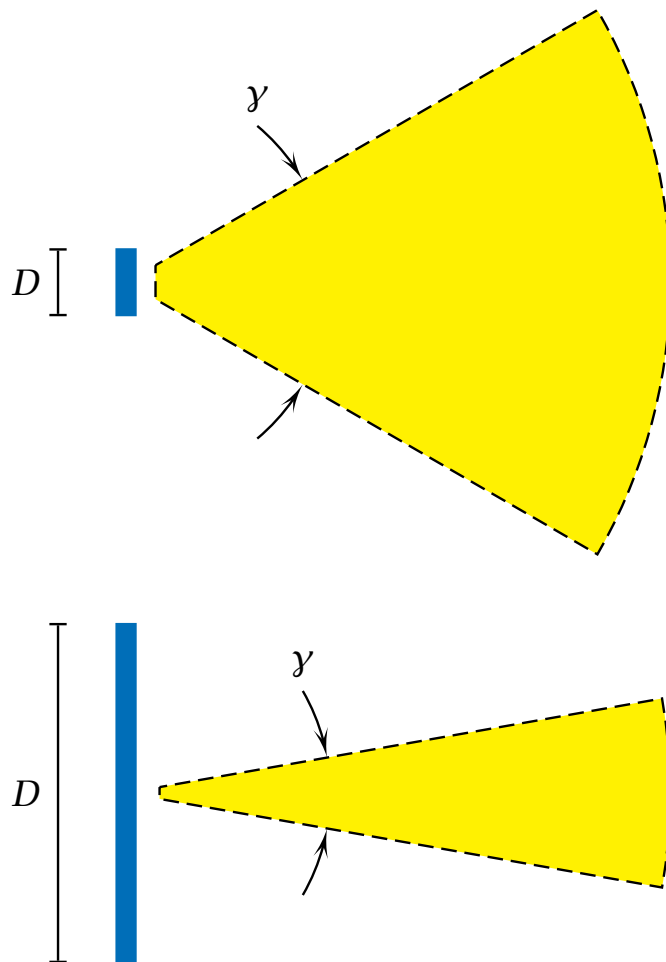
Impulsform

Die gleiche Beziehung gilt bei Messung des Reflexionsfaktors im Frequenzbereich (z. B. stepped-frequency CW).

$$\Delta r = \frac{c_0 \cdot t_p}{2} = \frac{c_0}{2B}$$

Zahlenbeispiel: Für eine Entfernungsauflösung von $\Delta r = 50$ cm ist die Signalbandbreite $B = 300$ MHz erforderlich.

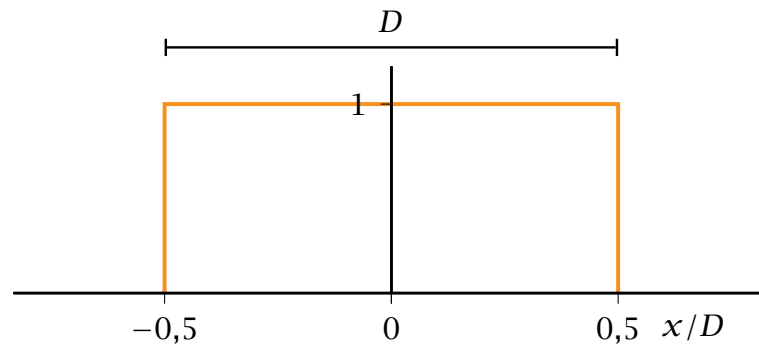
2.4 Winkelauflösung



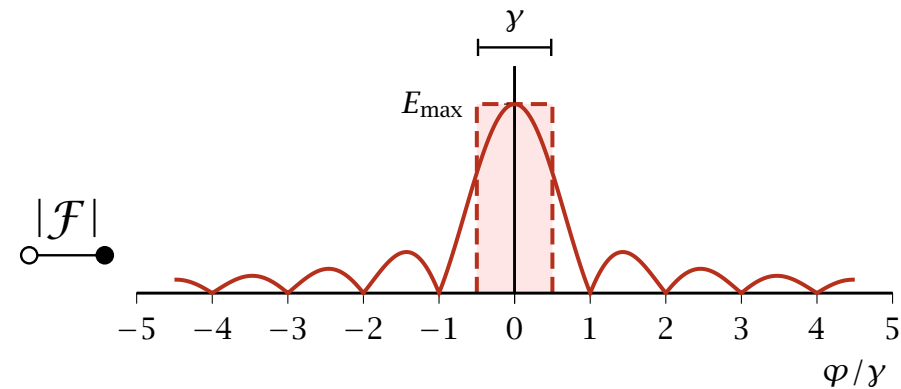
Zwischen der Bündelung einer Antenne und der erforderlichen Baugröße besteht ebenfalls ein grundsätzlicher (Fourier-) Zusammenhang:

Je kleiner der Öffnungswinkel, desto größer die erforderliche Aperturabmessung in Wellenlängen.

Winkelauflösung



Aperturbelegung



Richtcharakteristik

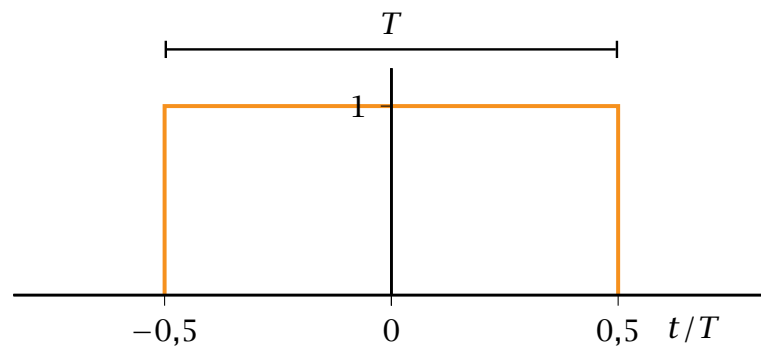
Abschätzung der Halbwertsbreite (3-dB-Breite) und der Winkelauflösung (Zweiwegediagramm, 1,5-dB-Breite):

$$\gamma_{3\text{dB}} \approx 70^\circ \cdot \frac{\lambda_0}{D}$$

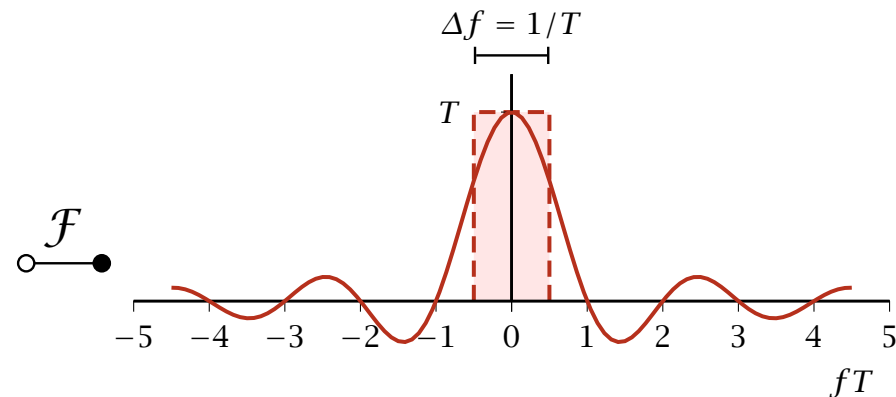
$$\Delta\varphi \approx 50^\circ \cdot \frac{\lambda_0}{D}$$

Zahlenbeispiel: Für eine Winkelauflösung von $\Delta\varphi = 5^\circ$ ist in etwa eine Antenne von der Größe $D = 10\lambda_0$ erforderlich. Mit zunehmender Frequenz kann die Antennenbaugröße bei gleicher Bündelung also kleiner werden.

2.5 Dopplerauflösung



Messdauer



Linienbreite

Die spektrale Linienbreite ist umgekehrt proportional zur Messdauer:

$$\Delta f = \frac{1}{T}$$

Zahlenbeispiel: Für eine Dopplerauflösung von $\Delta f = 100 \text{ Hz}$ ist eine Messdauer von $T = 10 \text{ ms}$ erforderlich.

2.6 Auflösung und Genauigkeit

Auflösung Der *kleinste Abstand*, den zwei Ziele in einer Funkkoordinate haben dürfen, damit sie als getrennte Ziele erkannt werden.

$$\Delta r = \frac{c_0}{2B} \qquad \Delta \varphi = 50^\circ \cdot \frac{\lambda_0}{D}$$

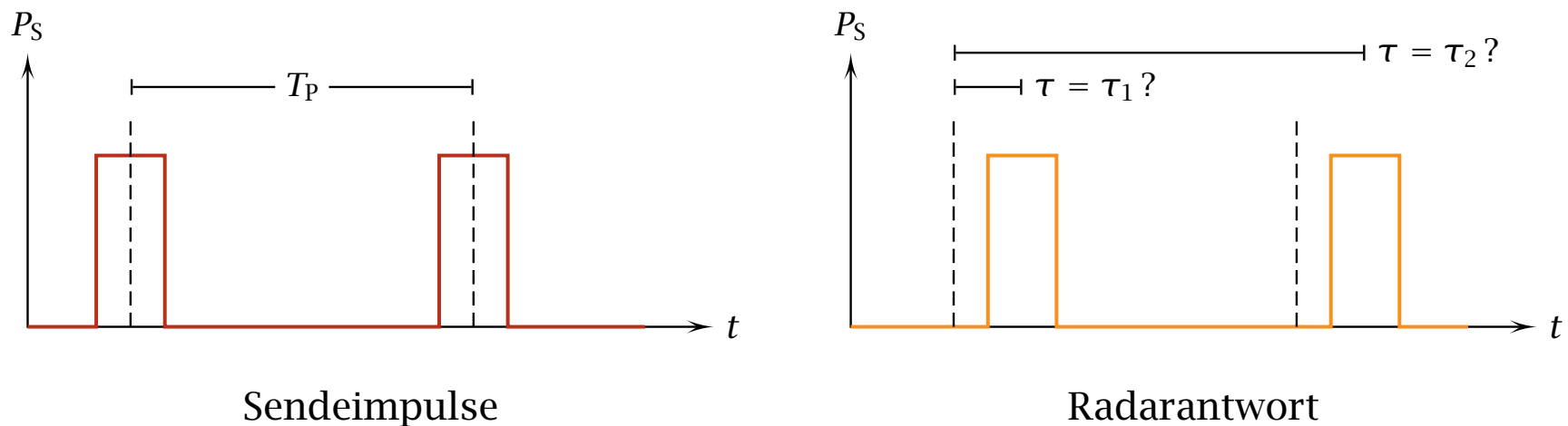
Wesentlich sind hier die Signalbandbreite B und/oder die Aperturgröße D .

Messgenauigkeit Der *kleinste Messfehler*, mit dem eine Funkkoordinate bestimmt werden kann.

$$\Delta \tau = t_p \frac{1}{\sqrt{2S/N}}$$

Wesentlich sind hier Signalleistung und Empfängerempfindlichkeit. Bei statistischen Störungen kann hoher Störabstand S/N auch durch eine hohe Messzeit erreicht werden (Mittelung).

2.7 Eindeutigkeitsbereich



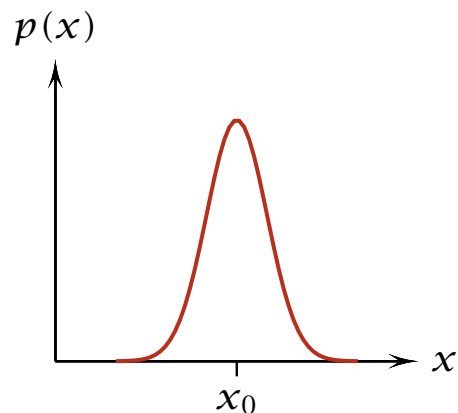
Die Laufzeit-Zuordnung ist eindeutig, solange alle Antwortimpulse vor der Aussendung des nächsten Sendepulses eintreffen. Damit ist der Eindeutigkeitsbereich

$$r_E = \frac{c_0 \cdot T_P}{2}$$

Zahlenbeispiel: Bei einer Pulswiederholfrequenz von $1/T_P = 1 \text{ MHz}$ ist der Eindeutigkeitsbereich $r_E = 150 \text{ m}$.

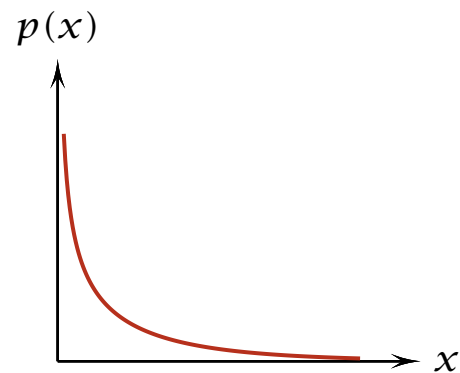
3 Ortungsfehler

3.1 Wichtige Verteilungsdichten



Gaußverteilung

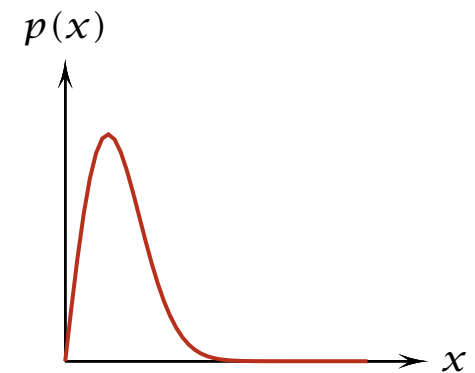
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$



χ^2 -Verteilung

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu x}} \cdot e^{-\frac{x}{\mu}}$$

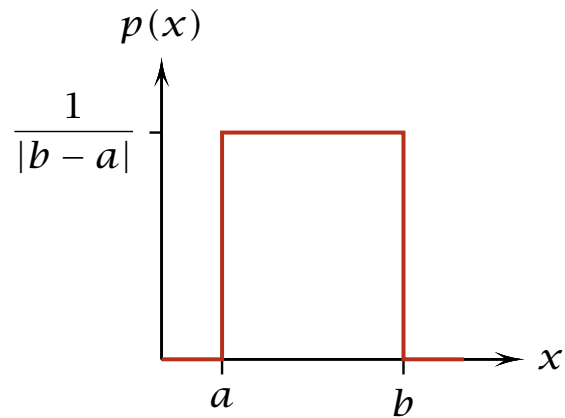
für $x > 0$



Rayleighverteilung

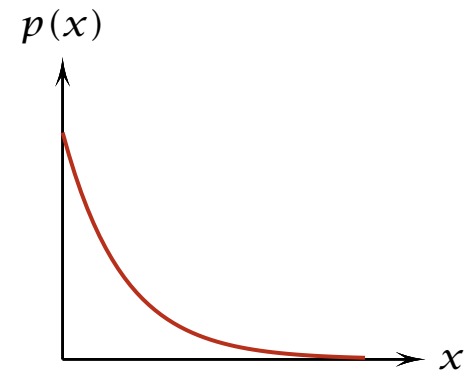
$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Wichtige Verteilungsdichten



Gleichverteilung

$$p(x) = \frac{\delta_{-1}(x-a) - \delta_{-1}(x-b)}{|b-a|}$$



Exponentialverteilung

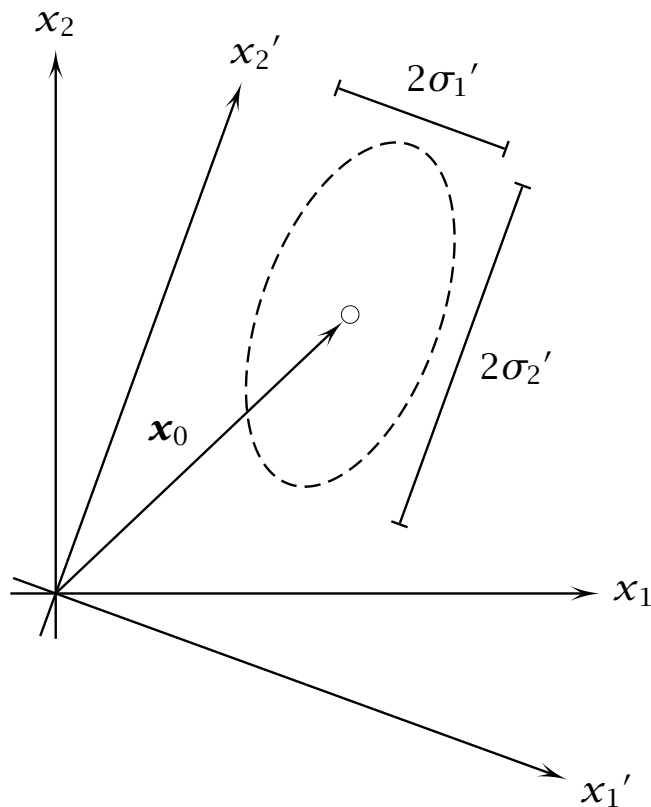
$$p(x) = \frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{x}{\mu}}$$

für $x \geq 0$

Beispiele aus der Signalverarbeitung

- Gaußverteilung** entsteht, wenn sich eine große Anzahl statistisch unabhängiger, gleichverteilter Prozesse zu einem Summenprozess überlagert (zentraler Grenzwertsatz).
- χ^2 -Verteilung** entsteht, wenn eine gaußverteilte Zufallsvariable über eine quadratische Kennlinie transformiert wird.
- Rayleighverteilung** ist die Verteilungsdichte der Einhüllenden eines stationären, gaußverteilten Schmalbandprozesses.
- Exponentialverteilung** entsteht, wenn die Einhüllende eines stationären, gaußverteilten Schmalbandprozesses mit einer quadratischen Kennlinie detektiert wird.

3.2 Fehlerellipsen und Fehlerkreis



Durch Hauptachsentransformation lassen sich Koordinatenrichtungen (x_1', x_2') finden, für die x_1' und x_2' unkorreliert sind.

Wahrscheinlichkeiten p dafür, dass der wahre Standort innerhalb einer Ellipse mit den Halbachsen $a = \xi\sigma_x$ und $b = \xi\sigma_y$ liegt:

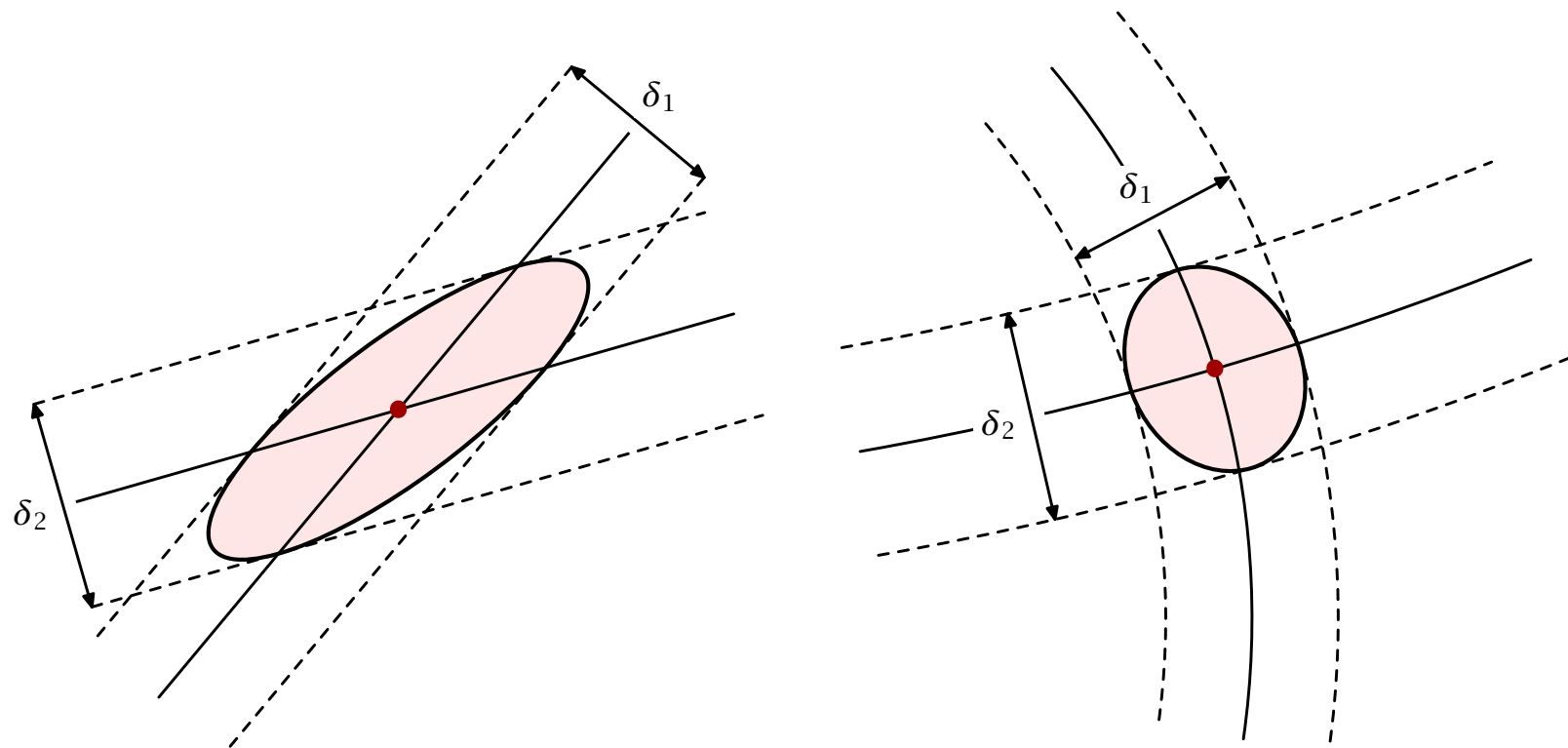
ξ	p
1	39,3 %
2	86,5 %
3	98,9 %

Der Radius

$$R_{\text{RMS}} = \sqrt{\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2}$$

eines Fehlerkreises mit $63\% \leq p \leq 68\%$ ist auch dann sinnvoll, wenn $\sigma_v' \rightarrow 0$.

3.3 Standlinien-Netz



Standlinien sollten sich möglichst senkrecht schneiden.
Spitze Schnittwinkel sind ungünstig.

4 Ortungs- und Navigationsverfahren

4.1 Begriffe

- a) Eigenortung b) Fremdortung c) Navigation
d) Standfläche e) Standlinie f) Standort

4.2 Aufgaben

- Messungen und Berechnungen, die zur Bestimmung des augenblicklichen Ortes und der augenblicklichen Geschwindigkeit notwendig sind.
- Vorhersage des Weges eines Fahrzeugs unter Beibehaltung des augenblicklichen Bewegungszustandes.
- Berechnung der notwendigen Manöver, um ein vorgegebenes Ziel zu erreichen.

4.3 Grundverfahren

Prinzip	Beispiel
Laufzeit	
Einwegverfahren	GPS, GLONASS
Zweiwegverfahren	DME, Pulsradar
Phasendifferenz	
Codemäßige oder zeitliche Trennung der Signale	OMEGA, LORAN
Frequenzmäßige Trennung der Signale	DECCA
Amplitude	
Drehung einer Richtantenne (Max.- oder Min.-Peilung)	ADF, Radar
Auswertung eines Differenzdiagramms	Monopuls
konstanter Umlauf einer bekannten Richtcharakteristik	VOR
Schwenken einer Richtcharakteristik in begrenztem Sektor	MLS
richtungsabhängige Modulationsgrad-Diagramme	ILS
Frequenz	
Auswertung der Dopplerinformation	Dopplernavigator

4.4 Frequenzbereiche

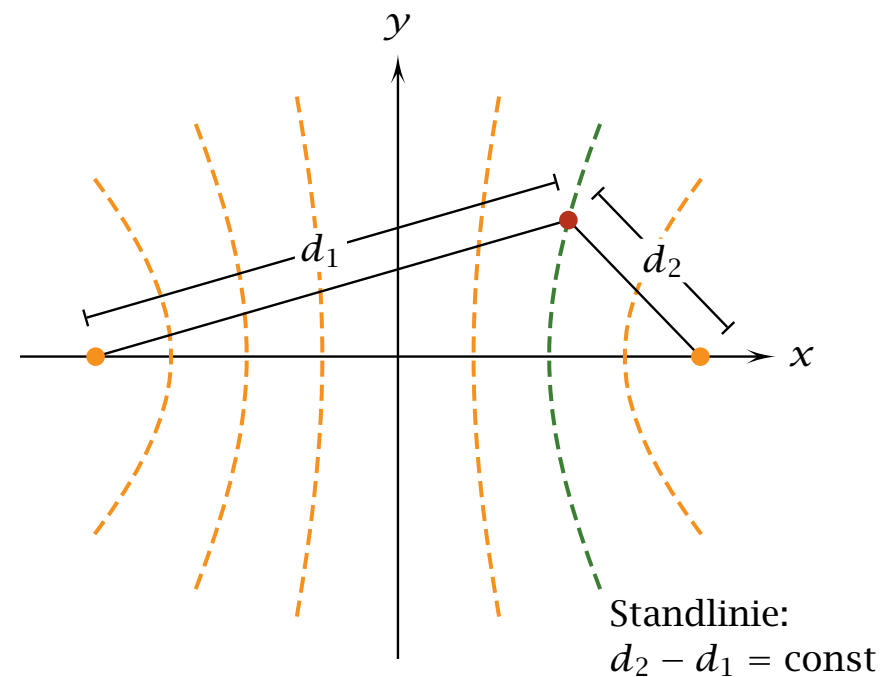
Frequenzband	Navigationsverfahren	Frequenzband	Navigationsverfahren
10 kHz... 14 kHz	OMEGA	225 MHz... 400 MHz	Peiler, militärisch
70 kHz... 130 kHz	DECCA, LORAN-C/D	328 MHz... 335 MHz	ILS-Gleitweg
190 kHz... 375 kHz	CONSOL	960 MHz... 1215 MHz	TACAN, DME, Sekundär-Radar
255 kHz... 415 kHz	Flug- und Seefunkfeuer	600 MHz, 1300 MHz, 2,8 GHz, 10 GHz, 15,5 GHz, 38 GHz	Bordradar, Weterradar, Flugfeldüberwachung
1750 kHz... 1950 kHz	LORAN-A	1574,42 MHz, 1227,6 MHz	GPS, GLONASS, GALILEO
73,8 MHz... 75,2 MHz	Markierungs- Funkfeuer	5,0 GHz... 5,25 GHz	Mikrowellenlandesys- tem (MLS, TRSB)
108 MHz... 118 MHz	ILS-Landekurs, VOR, Doppler-VOR	440 MHz, 1630 MHz, 4,3 GHz	Radarhöhenmesser
118 MHz... 136 MHz	Peiler, zivil	8,75 GHz... 8,85 GHz 13,25 GHz... 13,4 GHz	Dopplernavigator

4.5 Hyperbelnavigation

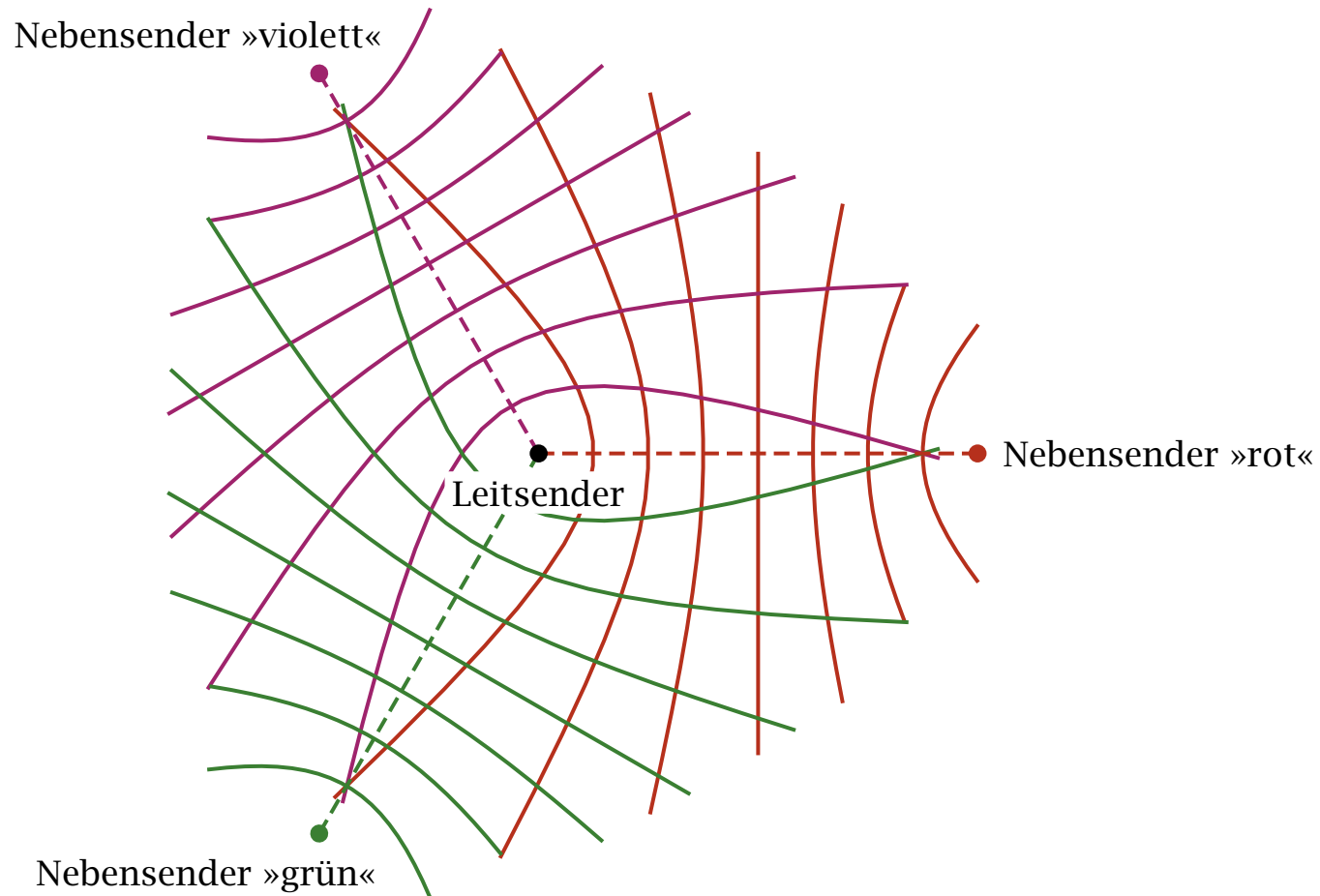
Eine Basis besteht aus einem Leitsender und einem Nebensender.

Bestimmung von $d_2 - d_1$ durch Phasendifferenz (DECCA) oder Puls-Laufzeitdifferenz (LORAN).

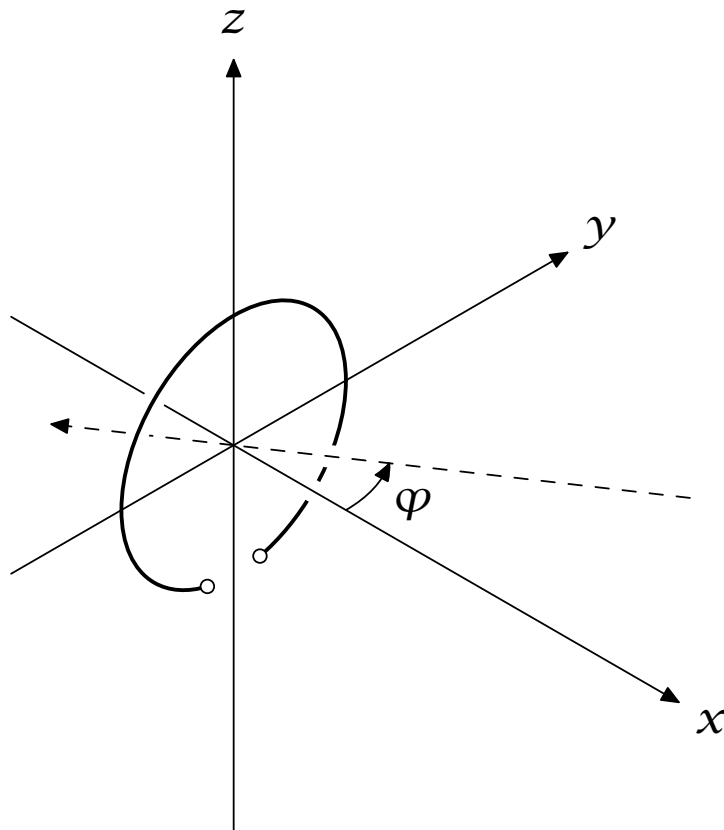
Standortbestimmung durch drei Hyperbelscharen (höhere Genauigkeit) benötigt einen Leitsender und drei Nebensender (»Kette«).



DECCA-Kette



4.6 Richtungspeilung



Leerlaufspannung einer Rahmenantenne (Abmessung $D \ll \lambda_0$, Einfallsebene ist die xy -Ebene, Polarisation in z -Richtung):

$$U_0 \approx j\omega\mu_0 H_0 \cdot A \cdot \sin \varphi \\ = j\beta_0 E_0 \cdot A \cdot \sin \varphi .$$

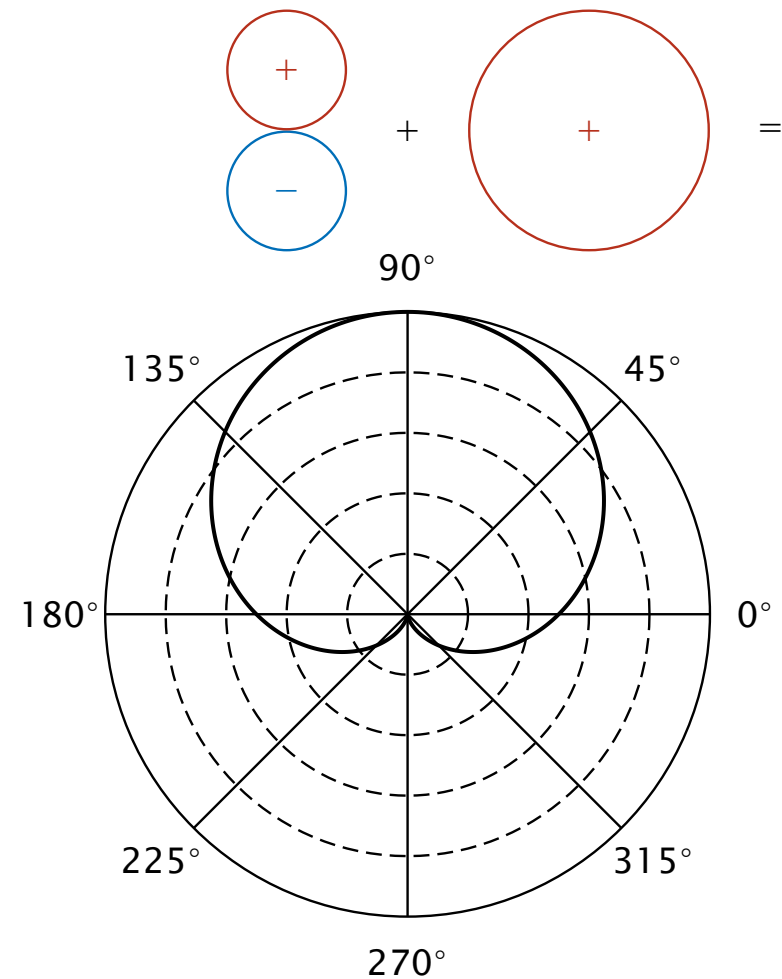
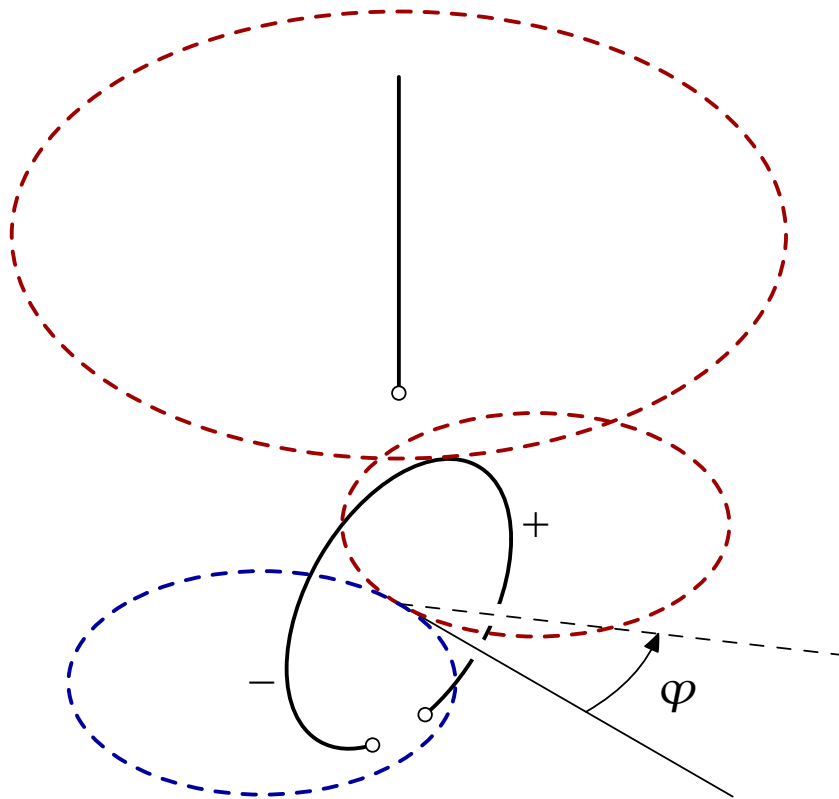
Leerlaufspannung einer Monopol-Antenne (Polarisation in z -Richtung):

$$U_0 = \ell_{\text{eff}} E_0 .$$

Die Rahmenspannung eilt der Monopolspannung um 90° vor. Zur Addition der Empfangsspannungen ist daher ein 90° -Phasenschieber notwendig.

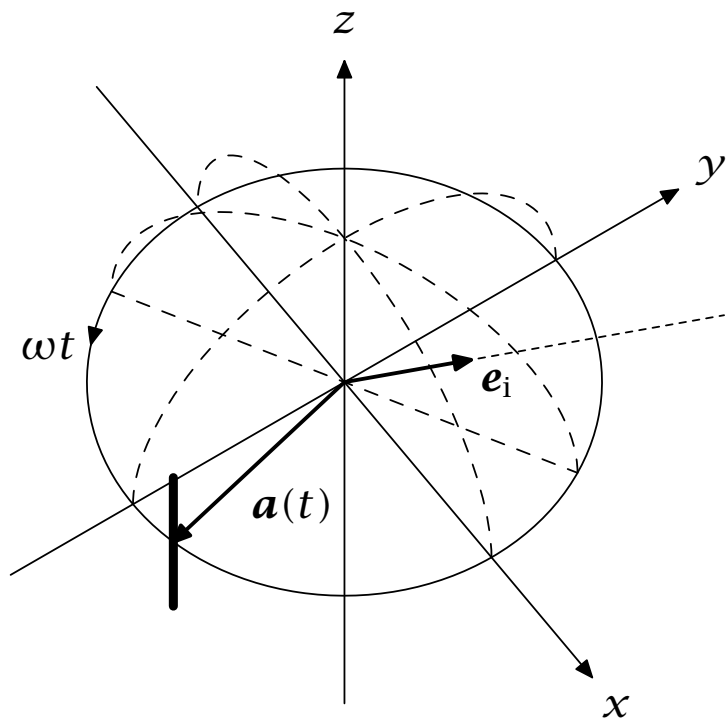
Richtungspeilung

Richtcharakteristik einer Kombination aus Monopol- und Rahmenantenne:



4.7 Dopplerpeiler

Eine auf einer Kreisbahn mit der Kreisfrequenz ω umlaufende Antenne:



$$\Delta s(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{e}_i = a \sin \vartheta \cos(\omega t - \varphi).$$

Empfangsspannung:

$$u_E(t) = U_E \cos(\omega_s t + \beta_0 \Delta s(t)).$$

Sinusförmige FM mit Momentanfrequenz

$$\omega_M = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \omega \sin \vartheta \sin(\omega t - \varphi).$$

Frequenzhub $\rightsquigarrow \vartheta$

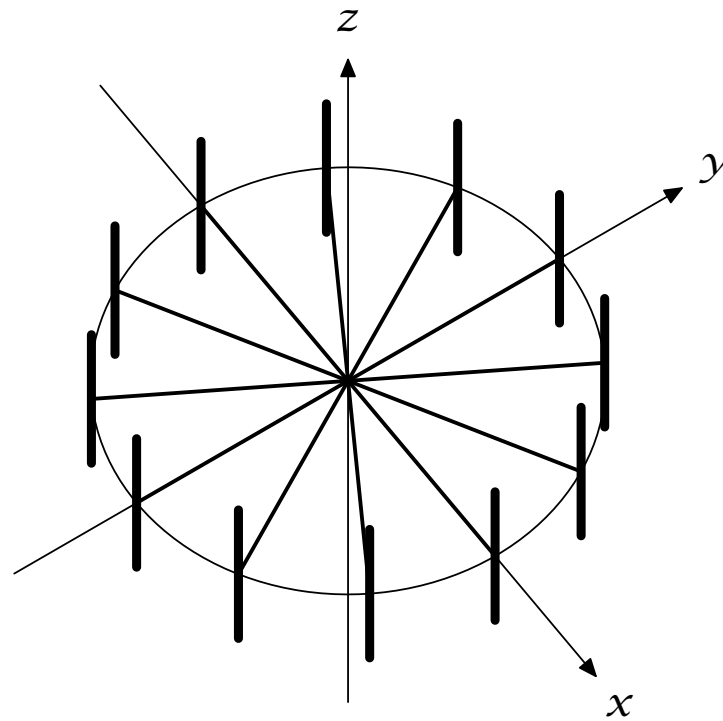
Phase $\rightsquigarrow \varphi$

$$\mathbf{e}_i = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \vartheta \mathbf{e}_z$$

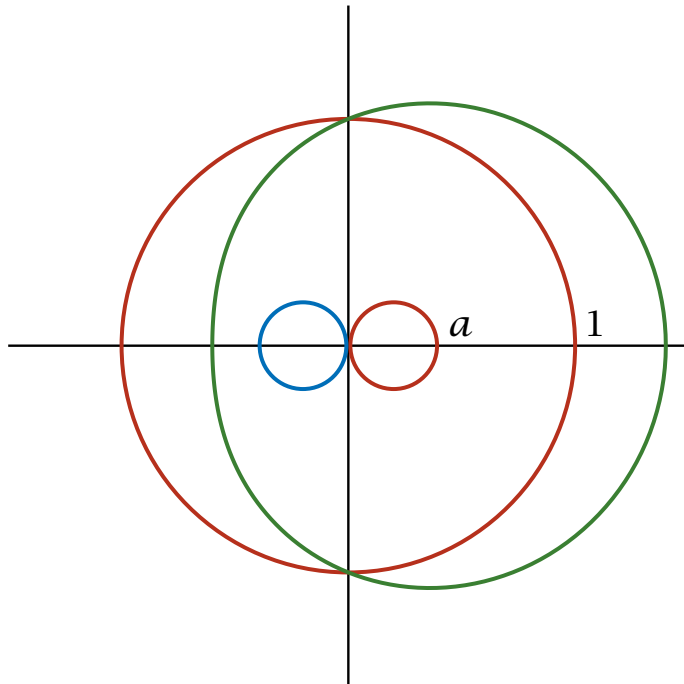
$$\mathbf{a}(t) = a \cos \omega t \mathbf{e}_x + a \sin \omega t \mathbf{e}_y$$

Realisierung eines Dopplerpeilers

Kreisförmige, starr aufgebaute Dipolgruppe mit sequenzieller Abtastung.



4.8 Very High Frequency Omnidirectional Radio (VOR)



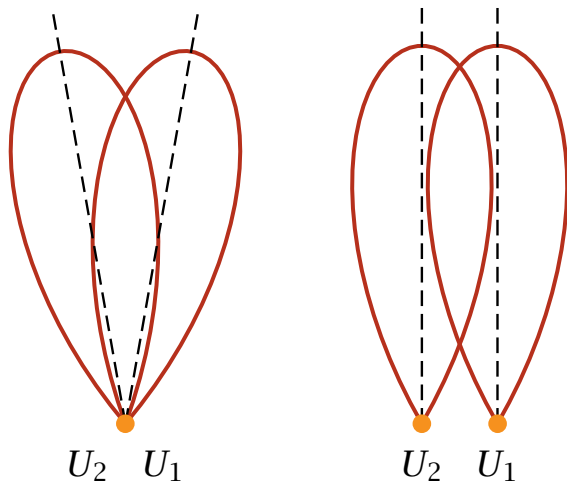
- Kombination Rahmenantenne-Monopol erzeugt eine Richtcharakteristik mit harmonischer Amplitudenschwankung:

$$F_R(\varphi) = 1 + a \cos \varphi .$$

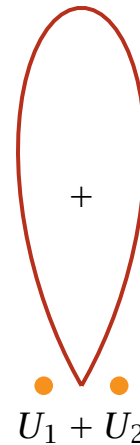
- Durch Rotation der Rahmenantenne mit 30 U/s wird ein mit 30 Hz amplitudenmoduliertes Signal abgestrahlt.
- Zusätzlich wird mit Rundcharakteristik ein 30-Hz-FM -Signal als Referenz abgestrahlt. Die Phase der Modulation dieses Referenzsignals ist 0° , wenn die umlaufende Antenne nach Norden weist.

Die Phasenverschiebung zwischen den beiden empfangenen 30-Hz -Signalen gibt die Richtung an, in der sich der Empfänger von der VOR-Station aus gesehen befindet.

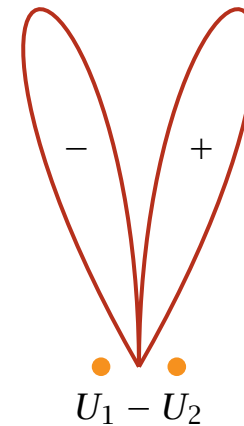
4.9 Monopuls-Verfahren



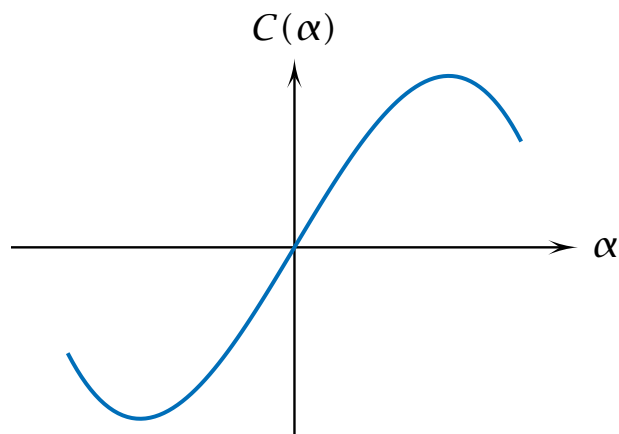
Einzeldiagramme



Summendiagramm



Differenzdiagramm



Winkelkennlinie:

$$C(\alpha) = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2}$$

Durch die Verhältnissbildung fällt die Empfangsamplitude heraus.

4.10 Instrumentenlandesystem (ILS)

Hauptbestandteile

Landekursender (110 MHz), modulationsabhängige Richtcharakteristik mit ± 90 Hz- und ± 150 Hz-Seitenbändern im Azimut

90 Hz \rightsquigarrow »nach rechts«

150 Hz \rightsquigarrow »nach links«

Gleitwegsender (330 MHz), modulationsabhängige Richtcharakteristik mit ± 90 Hz- und ± 150 Hz-Seitenbändern in der Elevation

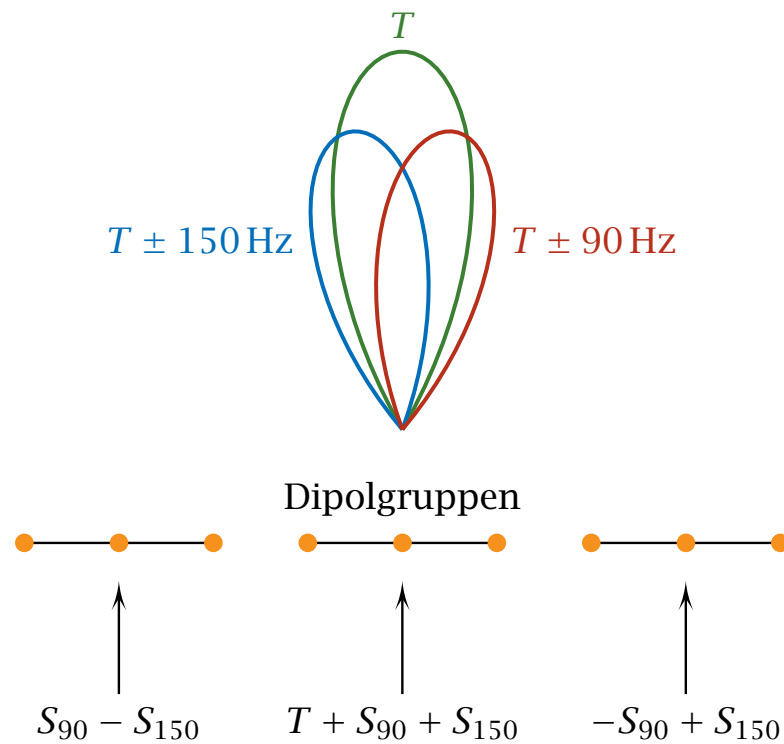
90 Hz \rightsquigarrow »tiefer«

150 Hz \rightsquigarrow »höher«

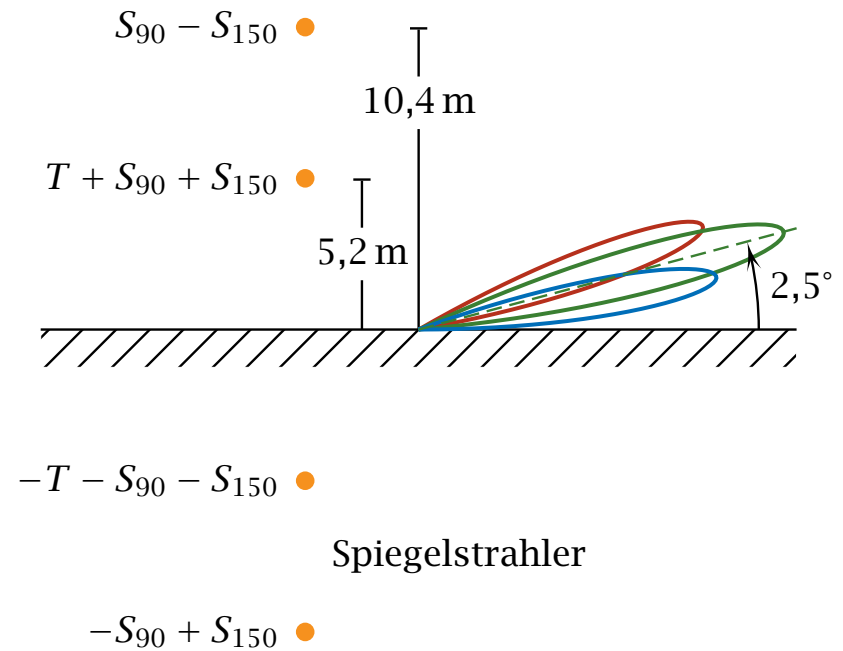
Haupteinflugzeichen (75 MHz), Gleitweg ist 100 ft über der Landebahn

Voreinflugzeichen (75 MHz), 4,5 Meilen vor der Landebahn

Erzeugung einer modulationsabhängigen Richtcharakteristik



ILS-Landekursender



ILS-Gleitwegsender

4.11 Satellitennavigation

Prinzip

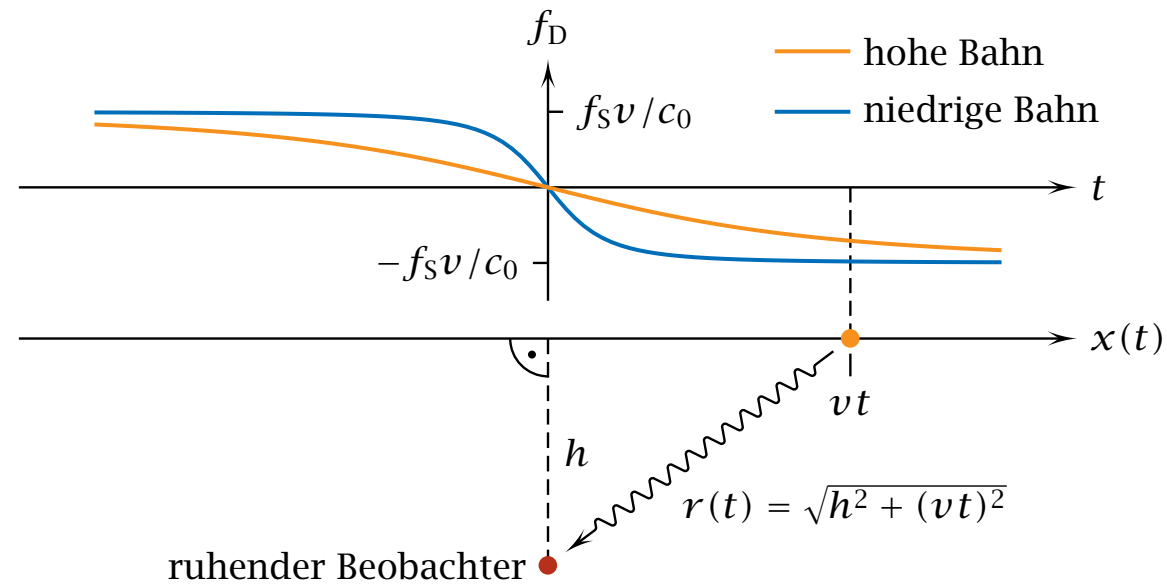
Eigenortung durch Messung der Dopplerverschiebung (Relativgeschwindigkeit des Satelliten) oder durch Laufzeitmessung (Entfernung zu Satelliten).

Durch Analyse des zeitlichen Dopplerverlaufs und/oder durch Abstandsmessung lassen sich Standlinien/Standflächen bezüglich einzelner Satelliten gewinnen.

Fehlerursachen

- Mehrfachreflexionen (Erdoberfläche, Gebäude, Gelände)
- Fluktuierende Brechung (geänderte Phasengeschwindigkeit) in der Ionosphäre

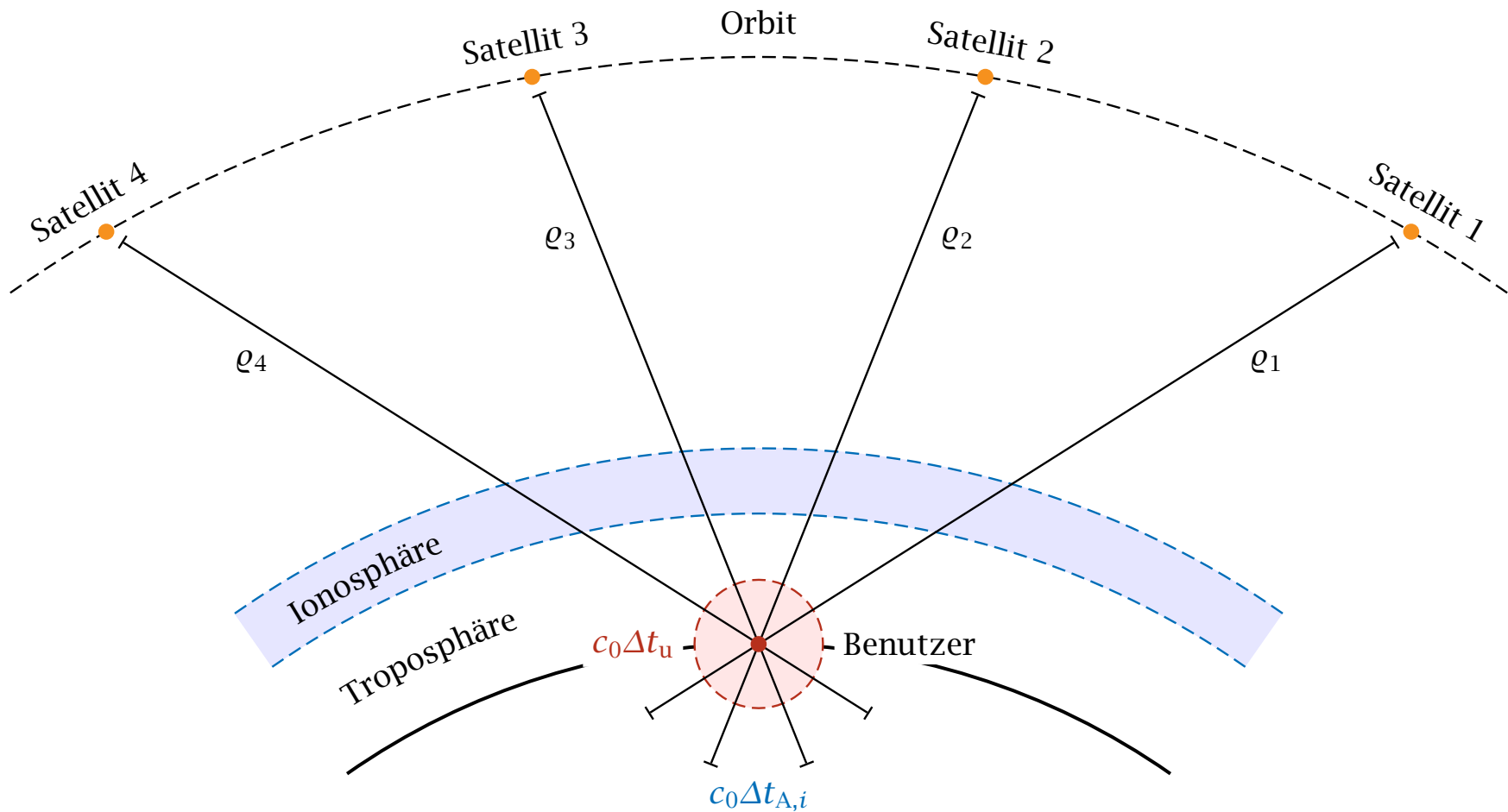
Zeitlicher Verlauf der Dopplerverschiebung



Maximale Änderung der Dopplerfrequenz bei eindimensionaler Bewegung:

$$\left. \frac{df_D}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{v^2}{\lambda \cdot h} \propto \frac{1}{h}$$

Global Positioning System (GPS)



GPS – Technische Daten

Flughöhe	20 183 km	Modulationsart	BPSK
Umlaufdauer T	11 h 56 min	Symbolrate C/A-Code	1,023 MHz
Satelliten	21 + 3	Symbolrate P-Code	10,23 MHz
Umlaufbahnen	6	Navigationsdaten	50 ^{Bit/s}
Inklination	55°	Sendeleistung	44,3 dBm
Dopplerverschiebung	±5 kHz max.	Empfangsleistung	–130 dBm

Frequenzen

L1	1,575 42 GHz
L2	1,227 60 GHz

Einfluss einer Gangabweichung der GPS-Atomuhren:

$$\frac{\Delta t}{T} = 4 \cdot 10^{-13} \quad \rightsquigarrow \quad \Delta t = 17,3 \text{ ns} \quad \rightsquigarrow \quad \Delta r = 5,2 \text{ m}$$

GPS – Positionsbestimmung

Beschreibende Geometrieparameter

Gesuchte Nutzerposition:

$$\mathbf{R}_0 = x_0 \mathbf{e}_x + y_0 \mathbf{e}_y + z_0 \mathbf{e}_z$$

Entfernungsmessfehler aufgrund des Uhrenfehlers Δt_u :

$$\varrho_0 = c_0 \Delta t_u$$

Position des i -ten Satelliten:

$$\mathbf{R}_i = x_i \mathbf{e}_x + y_i \mathbf{e}_y + z_i \mathbf{e}_z$$

Gemessene Entfernung vom Nutzer zum i -ten Satelliten inklusive Uhrenfehler (Pseudoentfernung, scheinbare Entfernung):

$$\varrho_i = |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0| + \varrho_0$$

Einheitsvektor vom Nutzer in Richtung des i -ten Satelliten:

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0) / |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0| = e_{xi} \mathbf{e}_x + e_{yi} \mathbf{e}_y + e_{zi} \mathbf{e}_z$$

Algebraische Lösung

Das Ortungsproblem hat vier Unbekannte x_0 , y_0 , z_0 und ϱ_0 . Daher benötigt man Entfernungsmessungen zu vier Satelliten, um daraus die drei Standortkoordinaten und den eigenen Uhrenfehler zu bestimmen.

Die vier Unbekannten x_0 , y_0 , z_0 und ϱ_0 müssen die vier Gleichungen

$$q_i(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0|^2 - (\varrho_i - \varrho_0)^2 = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, 4$$

erfüllen. Diese Gleichungen lauten ausgeschrieben

$$\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{R}_0 - 2(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_0) + \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_i - \varrho_0^2 + 2\varrho_i\varrho_0 - \varrho_i^2 = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, 4.$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem lässt sich wie folgt in drei lineare und eine quadratische Gleichung umformen. Zunächst berechnet man die drei Differenzen

$$\begin{aligned} q_j(\mathbf{R}_0, \varrho_0) - q_1(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = \\ 2(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{R}_0 - 2(\varrho_j - \varrho_1)\varrho_0 - \varrho_1^2 + \varrho_j^2 + |\mathbf{R}_1|^2 - |\mathbf{R}_j|^2 = 0 \quad ; \quad j = 2, \dots, 4. \end{aligned}$$

Es entsteht ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen, welches homogen und linear in den vier Unbekannten x_0 , y_0 , z_0 und ϱ_0 ist. Falls die Systemmatrix vollen Rang hat, ergeben sich drei abhängige und eine unabhängige Variable, sodass die allgemeine Lösung von der Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \varrho_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_0 \\ \tilde{\varrho}_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_0 \\ \hat{\varrho}_0 \end{pmatrix}$$

mit dem Parameter λ ist. Für jede dieser Lösungen gilt

$$q_1(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = q_2(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = q_3(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = q_4(\mathbf{R}_0, \varrho_0).$$

Wenn zusätzlich $q_1(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = 0$ gilt, sind alle vier Bedingungen $q_i(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = 0$ erfüllt. Einsetzen der allgemeinen Lösung in die Gleichung für $q_1(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{R}}_0|^2 + 2(\tilde{\mathbf{R}}_0 \cdot \hat{\mathbf{R}}_0)\lambda + |\hat{\mathbf{R}}_0|^2\lambda^2 - 2(\mathbf{R}_1 \cdot \tilde{\mathbf{R}}_0) - 2(\mathbf{R}_1 \cdot \hat{\mathbf{R}}_0)\lambda + |\mathbf{R}_1|^2 = \\ \tilde{\varrho}_0^2 + 2\tilde{\varrho}_0\hat{\varrho}_0\lambda + \hat{\varrho}_0^2\lambda^2 - 2\varrho_1\tilde{\varrho}_0 - 2\varrho_1\hat{\varrho}_0\lambda + \varrho_1^2, \end{aligned}$$

also eine quadratische Gleichung in λ . Die Lösung liefert zwei mögliche Werte λ_1 und λ_2 , von denen einer durch eine grobe Schätzung (z. B. \mathbf{R}_0 auf Erdoberfläche) auszuschließen ist (Quelle: [1, S. 640]).

Iterative Lösung

Ansatz: Die gemessenen Pseudoentfernungen enthalten einen unbekanntem Fehler:

$$\varrho_i = \sqrt{(x_i - x_0 + \delta x)^2 + (y_i - y_0 + \delta y)^2 + (z_i - z_0 + \delta z)^2}.$$

Linearisierung um Schätzwert (x_0, y_0, z_0) ergibt

$$\varrho_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2} - \mathbf{e}_i \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0| + B_0.$$

Mit $|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0| = \mathbf{e}_i \mathbf{R}_i - \mathbf{e}_i \mathbf{R}_0$ ergibt sich

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}_0 - B_0 = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}_i - \varrho_i.$$

In ausführlicher Matrix-Notation:

$$\begin{pmatrix} e_{x1} & e_{y1} & e_{z1} & -1 \\ e_{x2} & e_{y2} & e_{z2} & -1 \\ e_{x3} & e_{y3} & e_{z3} & -1 \\ e_{x4} & e_{y4} & e_{z4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{x1} & e_{y1} & e_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{x2} & e_{y2} & e_{z2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{x3} & e_{y3} & e_{z3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{x4} & e_{y4} & e_{z4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \\ \varrho_3 \\ \varrho_4 \end{pmatrix}$$

Die bestmögliche Lösung $\mathbf{X}_{\text{opt}} = (x_0 \ y_0 \ z_0 \ B_0)^T$ dieser Gleichung wird durch Iteration (Schätzwert $\hat{\mathbf{X}}$ ergibt $\hat{\mathbf{e}}_i$, danach neue Schätzung $\hat{\mathbf{X}}$ bis Änderung sehr klein) bestimmt.

Quellen und weiterführende Literatur

- [1] T. ARENS, F. HETTLICH, CH. KARPFINGER, U. KOCKELKORN, K. LICHTENEGGER und H. STACHEL: *Mathematik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 2008.
- [2] C. A. BALANIS: *Antenna Theory*. 3rd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.
- [3] D. K. BARTON: *Modern Radar System Analysis*. Artech House, 1988.
- [4] D. K. BARTON and H. R. WARD: *Handbook of Radar Measurement*. Artech House, 1984.
- [5] K. BAUR: *Eine Einführung in die Funkortung*. Ulm: Süddeutsche Verlagsgesellschaft, 1996.
- [6] L. BLAKE: *Radar Principles*. John Wiley & Sons, 1988.
- [7] R. E. COLLIN: *Antennas and Radiowave Propagation*. New York: McGraw-Hill, 1985.
- [8] J. DETLEFSEN: *Radartechnik*. Nachrichtentechnik 18. Berlin: Springer, 1989.

- [9] J. DETLEFSEN: *Radio Navigation and Location*. Lecture Notes. Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik. Technische Universität München, 2003.
- [10] J. DETLEFSEN und U. SIART: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. 4. Aufl. München: Oldenbourg, 2012.
- [11] E. HÖLZLER und H. HOLZWARTH: *Pulstechnik*. 2. Aufl. Bd. 1. Berlin: Springer, 1986.
- [12] A. ISHIMARU: *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.
- [13] J. D. KRAUS: *Antennas*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1988.
- [14] N. LEVANON: *Radar Principles*. John Wiley & Sons, 1988.
- [15] A. LUDLOFF: *Handbuch Radar und Radarsignalverarbeitung*. Braunschweig: Vieweg, 1993.
- [16] P. Z. PEEBLES: *Radar Principles*. New York: Wiley & Sons, 1998.
- [17] M. I. SKOLNIK: *Introduction to Radar Systems*. 3rd ed. Auckland: McGraw-Hill, 2001.
- [18] M. I. SKOLNIK, ed.: *Radar Handbook*. McGraw-Hill, 1990.

- [19] L. UHLIG u. a.: *Leitfaden der Navigation*. 2. Aufl. Berlin: transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, 1977.