

# Reflexion und Transmission an Grenzflächen und Wellenwiderstandssprüngen

<http://www.siart.de/lehre/reflexion.pdf>

Uwe Siart  
*tutorien@siart.de*

20. September 2010 (Version 1.54)

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Randbedingungen an Grenzflächen</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Einfache ebene Grenzfläche</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Streuparameter</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Ebene Mehrlagenstrukturen</b>	<b>6</b>

### 1 Randbedingungen an Grenzflächen

An Grenzflächen zwischen verschiedenen Medien, deren elektromagnetische Eigenschaften durch  $\varepsilon$  und  $\mu$  beschrieben sind, gelten feste Randbedingungen, die vom elektromagnetischen Feld erfüllt werden (müssen). Diese Randbedingungen gelten lokal, also in infinitesimal kleinen Bereichen an beliebig gekrümmten Grenzflächen. Zur Vereinfachung werden unten nur ebene und unendlich ausgedehnte Grenzflächen betrachtet. Die allgemeinen Randbedingungen sind jedoch Voraussetzung zur Bestimmung der auftretenden Felder und werden hier kurz angegeben.

Durch Festlegung der Richtung des Normaleneinheitsvektors  $\mathbf{n}$  wird eine Fläche *orientiert*. Es wird eine Richtung für positive Zählung eingeführt und daher werde die Seite der Grenzfläche, welche der Normalenzählung abgewandt ist, mit  $-$  bezeichnet, der zugehörige Grenzwert eines Feldes  $V$  sei der linksseitige Grenzwert  $V^-$ . Der rechtsseitige Grenzwert ist entsprechend mit  $V^+$  bezeichnet (Abb. 1).

Von einem Vektorfeld  $V$  erhält man durch die Operation  $\mathbf{n} \cdot V$  die Normalkomponente und durch  $\mathbf{n} \times V$  (abgesehen von einer  $90^\circ$ -Drehung um  $\mathbf{n}$ ) die Tangentialkomponente.

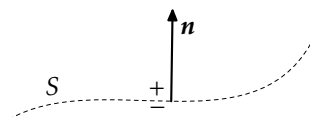


Abb. 1: Orientierte Grenzfläche  $S$  und Normalenvektor  $\mathbf{n}$

Deshalb ergibt  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-)$  den Sprung der Normalkomponente von  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{n} \times (\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-)$  den Sprung der Tangentialkomponente von  $\mathbf{V}$ .

Die elektromagnetischen Randbedingungen an einer beliebigen Grenzfläche für die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  lauten

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = \mathbf{0} \quad (1b)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = 0 \quad (1c)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = \mu_0 \mathbf{K}, \quad (1d)$$

wobei  $\sigma$  die Flächenladungsdichte ( $[\sigma] = \text{As/m}^2$ ) und  $\mathbf{K}$  die Flächenstromdichte ( $[\mathbf{K}] = \text{A/m}$ ) bezeichnen. In Worten bedeuten diese Randbedingungen [7]:

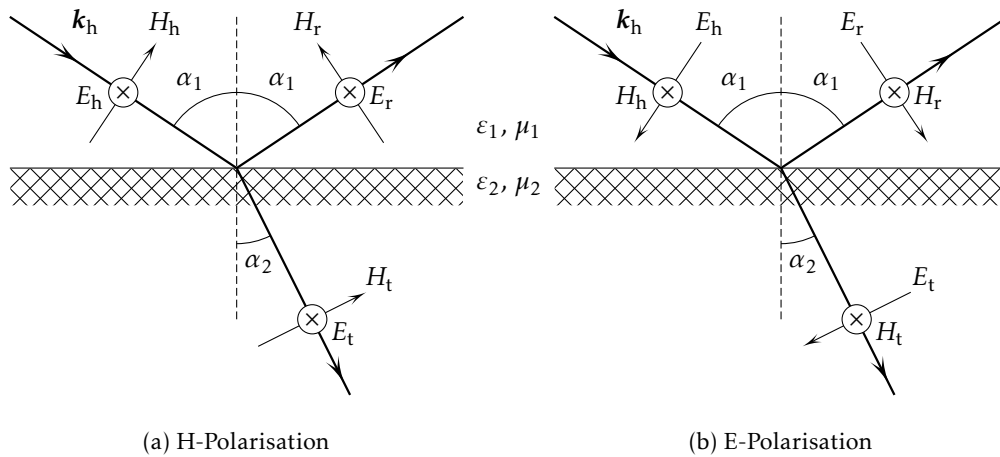
- Die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke ist an geladenen Flächen unstetig und springt dort um  $\sigma/\epsilon_0$ .
- Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist stetig.
- Die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte ist stetig.
- Die zum Flächenstrom  $\mathbf{K}$  senkrechte Tangentialkomponente der magnetischen Flussdichte ist unstetig und springt dort um  $\mu_0|\mathbf{K}|$ . Die  $\mathbf{K}$ -parallele Tangentialkomponente ist stetig.

Die unbedingte Stetigkeit von  $\mathbf{E}_{\text{tan}}$  und  $\mathbf{B}_{\text{norm}}$  legt die Amplituden der reflektierten und der transmittierten Welle fest, die bei Einfall einer ebenen Welle auf eine ebene Grenzfläche auftreten.

## 2 Einfache ebene Grenzfläche

Wir untersuchen den Einfall einer ebenen Welle mit den Feldamplituden  $E_h$  und  $H_h$  auf eine unendlich ausgedehnte Grenzfläche, an der die Materialgrößen  $\epsilon$  und  $\mu$  unstetig sind. Dabei ist der Fall einer Unstetigkeit von  $\epsilon$  technisch besonders bedeutsam.

Wenn  $\mathbf{k}_h$  den Wellenvektor der einfallenden Welle und  $\mathbf{n}$  den Normaleneinheitsvektor der Grenzschicht bezeichnen, dann heißt die von  $\mathbf{k}_h$  und  $\mathbf{n}$  aufgespannte Ebene die *Einfallsebene*. Der Ansatz, dass eine reflektierte und eine transmittierte Welle auftreten, führt zu einer Lösung, mit der an der Grenzschicht die Randbedingungen (1) erfüllt werden können. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen ist dieses auch die einzige Lösung.



**Abb. 2:** Reflexion einer homogenen ebenen Welle an einer ebenen Grenzfläche zwischen verschiedenen Medien. Es sind zwei orthogonale Fälle bezüglich der Polarisation der einfallenden Welle zu unterscheiden. Jeder beliebige Polarisationszustand kann aus diesen zwei Zuständen zusammengesetzt werden.

Weil die Randbedingungen von der Überlagerung aller drei Wellen und in allen Punkten der Grenzfläche zu jedem Zeitpunkt erfüllt werden müssen, folgt sofort, dass alle drei Wellen die gleiche Wellenlänge entlang der Grenzschicht haben müssen. Die einfallende und die reflektierte Welle breiten sich im gleichen Medium aus, daher müssen auch Einfallswinkel und Reflexionswinkel gleich sein. Aus dem Verhältnis der Wellenzahlen in beiden Medien ergibt sich der Zusammenhang

$$\sin \alpha_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} \sin \alpha_1 \quad (2)$$

zwischen dem Einfallswinkel  $\alpha_1$  und dem Brechungswinkel  $\alpha_2$ , der auch als *Snelliussche Brechungsgesetz* bekannt ist. Ferner folgt aus den Randbedingungen, dass sowohl der einfallende wie auch der gebrochene Strahl in der Einfallsebene liegen [10].

Falls  $\epsilon_1 \mu_1 > \epsilon_2 \mu_2$  ist, gibt es einen Winkel  $\alpha_1$ , für den  $\sqrt{\epsilon_1 \mu_1 / (\epsilon_2 \mu_2)} \sin \alpha_1 = 1$  wird. Oberhalb dieses Winkels  $\alpha_1 = \alpha_g$  besitzt (2) keine reelle Lösung mehr. Der gebrochene Strahl verschwindet und es tritt nur die reflektierte Welle auf. Man bezeichnet  $\alpha_g$  daher als den Grenzwinkel der Totalreflexion. Er ist bestimmt durch die Beziehung

$$\sin \alpha_g = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}. \quad (3)$$

Bei der Berechnung der Amplituden von transmittierter und reflektierter Welle sind zwei Grenzfälle zu unterscheiden:

- Die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle steht senkrecht auf der Einfallsebene (Abb. 2a, H-Polarisation).
- Die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle liegt parallel zur Einfallsebene (Abb. 2b, E-Polarisation).

Aus den Randbedingungen (1) ergeben sich der Transmissionsfaktor  $t$  und der Reflexionsfaktor  $r$  für  $H$ -Polarisation zu

$$t_{\perp} = \frac{E_t}{E_h} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha_1}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \alpha_1}} = \frac{2Z_{F2} \cos \alpha_1}{Z_{F2} \cos \alpha_1 + Z_{F1} \cos \alpha_2} \quad (4a)$$

$$r_{\perp} = \frac{E_r}{E_h} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \alpha_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \alpha_1}} = \frac{Z_{F2} \cos \alpha_1 - Z_{F1} \cos \alpha_2}{Z_{F2} \cos \alpha_1 + Z_{F1} \cos \alpha_2}, \quad (4b)$$

wobei  $Z_{F1,2} = \sqrt{\mu_{1,2}/\varepsilon_{1,2}}$  die Feldwellenwiderstände in beiden Medien bezeichnen. Mit Berücksichtigung von (2) kann der Reflexionsfaktor auch in der Form

$$r_{\perp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} \cos \alpha_1 - \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} \cos \alpha_2}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} \cos \alpha_1 + \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} \cos \alpha_2} = \frac{\cos \alpha_1 - \sqrt{(\varepsilon_2 \mu_1 / \varepsilon_1 \mu_2) - (\mu_1 / \mu_2)^2 \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1 + \sqrt{(\varepsilon_2 \mu_1 / \varepsilon_1 \mu_2) - (\mu_1 / \mu_2)^2 \sin^2 \alpha_1}} \quad (4b')$$

dargestellt werden. Es gibt einen Winkel  $\alpha_1 = \alpha_b$ , für den der Zähler von (4b') verschwindet. Bei diesem Winkel tritt also keine reflektierte Welle auf. Er heißt *Brewsterwinkel* und ist für  $H$ -Polarisation durch die Beziehungen

$$\sin^2 \alpha_{b\perp} = \frac{Z_{F1}^2 - Z_{F2}^2}{Z_{F1}^2 \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} - Z_{F2}^2} = \frac{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2} - 1}{(\mu_1 / \mu_2)^2 - 1} \quad \text{bzw.} \quad (5a)$$

$$\tan^2 \alpha_{b\perp} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2} \quad (5b)$$

festgelegt. Offenbar gibt es keine reelle Lösung, falls  $\mu_1 = \mu_2$  ist. Bei rein dielektrischen, nicht magnetischen Grenzflächen gibt es also bei  $H$ -Polarisation *keinen* Winkel, bei dem die Reflexion verschwindet.

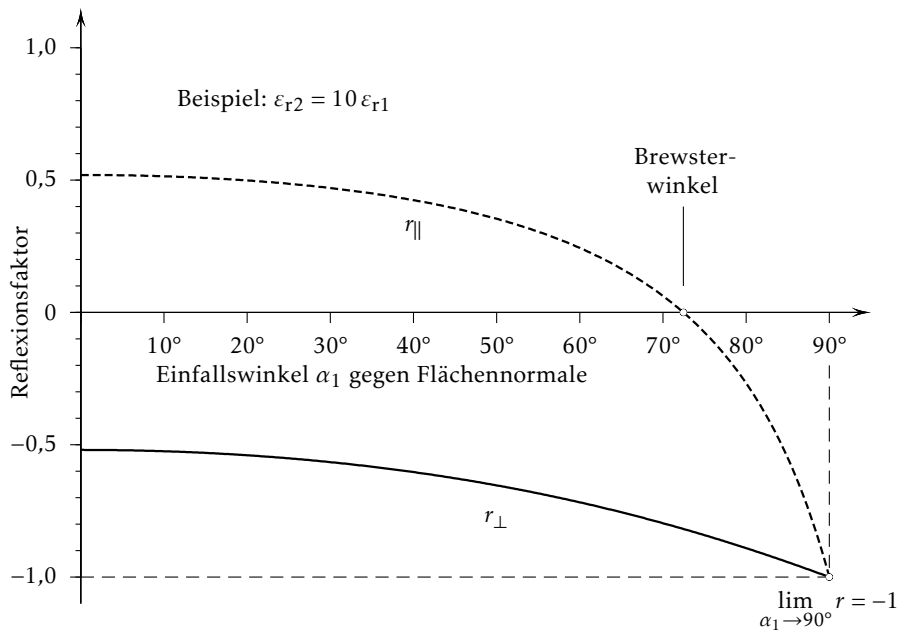
Im Falle der  $E$ -Polarisation werden die Randbedingungen durch

$$t_{\parallel} = \frac{E_t}{E_h} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos \alpha_1}{\varepsilon_2 \cos \alpha_1 + \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 \sin^2 \alpha_1}} = \frac{2Z_{F2} \cos \alpha_1}{Z_{F1} \cos \alpha_1 + Z_{F2} \cos \alpha_2} \quad (6a)$$

$$r_{\parallel} = \frac{E_r}{E_h} = \frac{\varepsilon_2 \cos \alpha_1 - \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 \sin^2 \alpha_1}}{\varepsilon_2 \cos \alpha_1 + \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 \sin^2 \alpha_1}} = \frac{Z_{F1} \cos \alpha_1 - Z_{F2} \cos \alpha_2}{Z_{F1} \cos \alpha_1 + Z_{F2} \cos \alpha_2} \quad (6b)$$

erfüllt. Auch hier ergibt sich die allgemeine Darstellung des Reflexionsfaktors

$$r_{\parallel} = \frac{\cos \alpha_1 - \sqrt{(\varepsilon_1 \mu_2 / \varepsilon_2 \mu_1) - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^2 \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1 + \sqrt{(\varepsilon_1 \mu_2 / \varepsilon_2 \mu_1) - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^2 \sin^2 \alpha_1}} \quad (6b')$$



**Abb. 3:** Betrag des Reflexionsfaktors für E-Polarisation und für H-Polarisation. Im Beispiel ist der dielektrische Kontrast  $\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1} = 10$  und  $\mu_{r2} = \mu_{r1}$ .

und der Brewsterwinkel ist durch die Beziehungen

$$\sin^2 \alpha_{b\parallel} = \frac{Z_{F2}^2 - Z_{F1}^2}{Z_{F2}^2 \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} - Z_{F1}^2} = \frac{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1} - 1}{(\epsilon_1/\epsilon_2)^2 - 1} \quad \text{bzw.} \quad (7a)$$

$$\tan^2 \alpha_{b\parallel} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_1 \mu_2 - \epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2} \quad (7b)$$

festgelegt. Diese Beziehungen besitzen auch bei rein dielektrischen Grenzflächen stets eine Lösung. Bei dem technisch wichtigen Fall einer dielektrischen Grenzschicht, bei der die Permittivität jenseits der Grenzschicht größer ist, gibt es also einen Einfallswinkel, bei dem keine Reflexion auftritt, falls die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle in der Einfallsebene liegt. Für die orthogonale Polarisation gibt es keinen solchen Winkel [10, 12].

In Abb. 3 ist der Verlauf von (4b) und (6b) über dem Einfallswinkel  $\alpha_1$  für einen  $\epsilon$ -Sprung um den Faktor 10 aufgetragen. Bemerkenswert ist, dass beide Reflexionsfaktoren für flachen Einfall gegen  $r = -1$  streben. Bei streifendem Einfall wirkt also jede dielektrische Grenzschicht unabhängig von der Polarisation nahezu wie ein metallischer Spiegel. Bei senkrechtem Einfall ( $\alpha_1 = 0$ ) ist die Unterscheidung zwischen H- und E-Polarisation nicht möglich. Beide Reflexionsfaktoren müssen also für  $\alpha_1 = 0$  den gleichen Wert aufweisen. Die unterschiedlichen Vorzeichen in Abb. 3 haben ihre Ursache in den in Abb. 2 eingeführten Zählrichtungen für die elektrische Feldstärke. In Abb. 2a

sind  $E_r$  und  $E_h$  für  $\alpha_1 \rightarrow 0$  gleich gerichtet, in Abb. 2b ergeben sich entgegengesetzte Zählrichtungen.

### 3 Streuparameter

Für senkrechten Einfall auf eine dielektrische Grenzschicht kann ein einfaches Leitungersatzschaltbild angegeben werden und die Beziehungen (4) und (6) können auf Diskontinuitäten (Sprünge) des Leitungswellenwiderstandes direkt übertragen werden. Die Faktoren  $r$  und  $t$  bezeichnen dann jeweils die Reflexion und die Transmission bezüglich der Spannungsamplituden beider ablaufender Wellen. Durch Einsetzen von  $\alpha_1 = 0$  in (4) ergibt sich

$$t = \frac{2Z_{F2}}{Z_{F2} + Z_{F1}} \quad (8a)$$

$$r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F2} + Z_{F1}} \quad (8b)$$

für eine Leitungsdiskontinuität wie in Abb. 4. Zur Bestimmung der Streumatrix ist wieder zu berücksichtigen, dass die Streuparameter Wellengrößen  $a_v = U_v^+/\sqrt{Z_{Fv}}$  und  $b_v = U_v^-/\sqrt{Z_{Fv}}$  in Beziehung setzen. Die Energieerhaltung erzwingt daher, dass die Streumatrix  $S$  eines verlustfreien  $n$ -Tores die Bedingung

$$(S^*)^T S = E \quad (9)$$

erfüllt. Für ein verlustfreies Zweitor folgt hieraus insbesondere

$$|s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = 1 \quad (10a)$$

$$|s_{22}|^2 + |s_{12}|^2 = 1. \quad (10b)$$

Es ergibt sich mit  $s_{11} = -s_{22} = r$ , und  $s_{12} = s_{21} = t\sqrt{Z_{F1}/Z_{F2}}$  die Streumatrix

$$S = \begin{pmatrix} \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F2} + Z_{F1}} & \frac{2\sqrt{Z_{F1}Z_{F2}}}{Z_{F2} + Z_{F1}} \\ \frac{2\sqrt{Z_{F1}Z_{F2}}}{Z_{F2} + Z_{F1}} & -\frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F2} + Z_{F1}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

eines Wellenwiderstandssprunges in einer Hochfrequenzleitung [2].

### 4 Ebene Mehrlagenstrukturen

Die bisherigen Betrachtungen beziehen sich auf eine einzelne Grenzschicht zwischen zwei einseitig unendlich ausgedehnten Halbräumen. Zur Ergänzung wird noch die Behandlung einer ebenen, dielektrischen Mehrlagenstruktur (engl.: multilayer) angegeben (Abb. 5). Die Darstellung folgt der von [9]. Dort wird der schräge Einfall einer ebenen Welle auf ein Mehrlagendielektrikum unter dem Einfallswinkel  $\alpha$  untersucht.

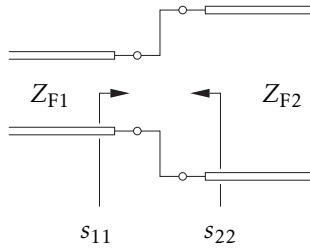


Abb. 4: Wellenwiderstandssprung auf einer Hochfrequenzleitung

Die Dicke der  $n$ -ten Schicht wird mit  $d_n$  bezeichnet, ihre relative Permittivität mit  $\epsilon_{rn}$ . Die gesamte Struktur ist von Vakuum ( $\epsilon_r = 1$ ) umgeben.

Als charakteristische Impedanz der  $n$ -ten Schicht ergibt sich für H-Polarisation

$$Z_n = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\epsilon_{rn} - \sin^2 \alpha}} \quad (12a)$$

und für E-Polarisation

$$Z_n = \frac{\sqrt{\epsilon_{rn} - \sin^2 \alpha}}{\epsilon_{rn} \cdot \cos \alpha}. \quad (12b)$$

Die elektrische Länge der  $n$ -ten Schicht ist

$$\Phi_n = \frac{2\pi}{\lambda_0} d_n \sqrt{\epsilon_{rn} - \sin^2 \alpha}. \quad (13)$$

Damit kann die Kettenmatrix

$$A_n = \begin{pmatrix} \cos \Phi_n & j Z_n \sin \Phi_n \\ j \sin \Phi_n / Z_n & \cos \Phi_n \end{pmatrix} \quad (14)$$

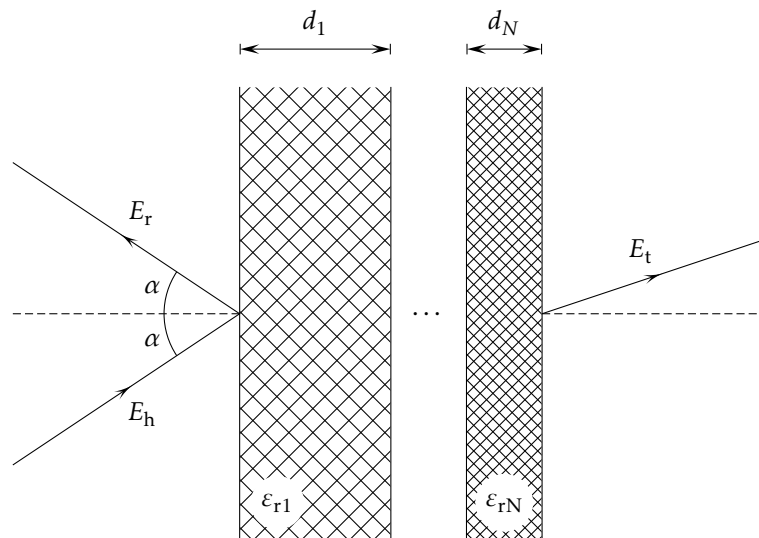


Abb. 5: Mehrlagenstruktur bei Einfall einer ebenen Welle

der  $n$ -ten Schicht eingeführt werden. Die Kettenmatrix der gesamten Mehrlagenstruktur ist dann

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & jB \\ jC & D \end{pmatrix} = \prod_{n=1}^N \mathbf{A}_n, \quad (15)$$

wobei zu beachten ist, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. Die Reihenfolge der einzelnen Schichten ist also nicht gleichgültig. Aus den Elementen der Gesamt-Kettenmatrix berechnen sich Transmission und Reflexion mit

$$t = \frac{2}{A + D + j(B + C)} \quad (16a)$$

$$r = \frac{A - D + j(B - C)}{A + D + j(B + C)}. \quad (16b)$$

### Literatur

- [1] BALANIS, C. A.: *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, Chichester, 1989.
- [2] BRAND, H.: *Schaltungslehre linearer Mikrowellennetze*. Hirzel-Verlag, Stuttgart, 1970.
- [3] COLLIN, R. E.: *Foundations for Microwave Engineering*. IEEE Press Series on Electromagnetic Theory. Wiley & Sons, Hoboken, 2nd edition, 2001.
- [4] CRISÓSTOMO, J., W. A. COSTA, and A. J. GIAROLA: *Electromagnetic Wave Propagation in Multilayer Dielectric Periodic Structures*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, AP-41(10):1432–1438, October 1993.
- [5] ISHIMARU, A.: *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [6] KARK, K.: *Antennen und Strahlungsfelder*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 3. Auflage, 2010.
- [7] KRÖGER, R. und R. UNBEHAUEN: *Elektrodynamik*. Teubner, Stuttgart, 3. Auflage, 1993.
- [8] MEINKE, H. und F. W. GUNDLACH: *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik*. Springer, Berlin, 5. Auflage, 1992.
- [9] SALEH, A. A. M.: *Polarization-Independent Multilayer Dielectrics at Oblique Incidence*. The Bell Systems Technical Journal, 54(6):1027–1049, July-August 1975.
- [10] SIMONYI, K.: *Theoretische Elektrotechnik*. Barth, Edition Dt. Verlag der Wissenschaften, Leipzig, 10. Auflage, 1993.

- [11] YOUNG, L. and E. G. CRISTAL: *Low-Pass and High-Pass Filters Consisting of Multilayer Dielectric Stacks*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-14(2):75–80, February 1966.
- [12] ZINKE, O. und H. BRUNSWIG: *Lehrbuch der Hochfrequenztechnik*, Band 1. Springer, Berlin, 4. Auflage, 1990.